Podróże po Imperium Liczb

Część 2

Cyfry liczb naturalnych

Andrzej Nowicki

Wydanie drugie, uzupełnione i rozszerzone

Olsztyn, Toruń, 2012

CYF - 38(954) - 7.12.2011

Spis treści

Wstęp

Głównym tematem prezentowanej serii książek są liczby i ich przeróżne własności. Autor od najmłodszych lat zbierał wszelkie fakty i ciekawostki dotyczące najpierw liczb całkowitych i wielomianów o współczynnikach całkowitych, a następnie dotyczące również liczb wymiernych, rzeczywistych, zespolonych oraz wielomianów nad tymi zbiorami liczbowymi. Nazbierało się sporo interesującego materiału, którego wybrane fragmenty będą tu przedstawione.

Materiał pochodzi z wielu różnych źródeł. Są tu zadania i problemy, które znajdziemy w popularnych czasopismach matematycznych. Wśród tych czasopism jest wychodzące od 1894 roku (przeważnie 10 numerów w roku) *The American Mathematical Monthly*. Są wśród tych czasopism również: angielskie czasopismo *Mathematical Gazette*, , kanadyjskie *Crux Mathematicorum*, rosyjskie *Kwant*, chińskie *Mathematical Excalibur*, itp. Godnymi uwagi są również polskie czasopisma popularno-naukowe: *Delta*, czasopismo dla nauczycieli *Matematyka* oraz inne.

Istotną rolę w prezentowanym materiale odegrały zadania z olimpiad i konkursów matematycznych całego świata. Każdego roku pojawiają się opracowania, książki oraz artykuły dotyczące zadań z różnych zawodów matematycznych. Wspomnijmy tylko o prestiżowych seriach książek z zawodów *International Mathematical Olympiad* (IMO) oraz *Putnam Mathematical Competition*. Sporo oryginalnych zadań znajduje się w opracowaniach dotyczących olimpiad matematycznych w Rosji lub w państwach byłego Związku Radzieckiego. Polska również ma wartościowe serie tego rodzaju książek.

Zebrany materiał pochodzi również z różnych starych oraz współczesnych podręczników i książek z teorii liczb. Wykorzystano liczne książki popularno-naukowe oraz prace naukowe publikowane w różnych czasopismach specjalistycznych. Są tu też pewne teksty pochodzące z internetu.

Większość prezentowanych faktów ma swoje odnośniki do odpowiedniej literatury. Odnośniki te wskazują tylko wybrane miejsca, w których można znaleźć albo informacje o danym zagadnieniu, albo rozwiązanie zadania, albo odpowiedni dowód. Bardzo często omawiany temat jest powtarzany w różnych pozycjach literatury i często trudno jest wskazać oryginalne źródła. Jeśli przy danym zagadnieniu nie ma żadnego odnośnika do literatury, to oznacza to, że albo omawiany fakt jest oczywisty i powszechnie znany, albo jest to własny wymysł autora.

Elementarna teoria liczb jest wspaniałym źródłem tematów zachęcających do pisania własnych programów komputerowych, dzięki którym można dokładniej poznać badane problemy. Można wykorzystać znane komputerowe pakiety matematyczne: MuPad, Mathematica, CoCoA, Derive, Maple i inne. W prezentowanej serii książek znajdziemy sporo wyników i tabel uzyskanych głównie dzięki pakietowi Maple.

We wszystkich książkach z serii "Podróże po Imperium Liczb" stosować będziemy jednolite oznaczenia. Zakładamy, że zero nie jest liczbą naturalną i zbiór $\{1, 2, 3, \dots\}$, wszystkich liczb naturalnych, oznaczamy przez $\mathbb{N}$. Przez $\mathbb{N}_0$ oznaczamy zbiór wszystkich nieujemnych liczb całkowitych, czyli zbiór $\mathbb{N}$ wzbogacony o zero. Zbiory liczb całkowitych, wymiernych, rzeczywistych i zespolonych oznaczamy odpowiednio przez $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ oraz $\mathbb{C}$. Zbiór wszystkich liczb pierwszych oznaczamy przez $\mathbb{P}$.

Największy wspólny dzielnik liczb całkowitych $a_1, \dots, a_n$ oznaczamy przez $\mathrm{nwd}(a_1, \dots, a_n)$ lub, w przypadkach gdy to nie prowadzi do nieporozumienia, przez $(a_1, \dots, a_n)$. Natomiast najmniejszą wspólną wielokrotność tych liczb oznaczamy przez $\mathrm{nww}(a_1, \dots, a_n)$ lub $[a_1, \dots, a_n]$. Zapis $a \mid b$ oznacza, że liczba a dzieli liczbę b. Piszemy $a \nmid b$ w przypadku, gdy a nie dzieli b. Część całkowitą liczby rzeczywistej x oznaczamy przez $[x]$. Jeśli m jest liczbą naturalną, to $\varphi(m)$ jest liczbą wszystkich liczb naturalnych mniejszych lub równych m i względnie pierwszych z liczbą m. Liczbę elementów skończonego zbioru A oznaczamy przez $|A|$.

Pewne zamieszczone tutaj fakty przedstawione są wraz z ich dowodami. Początek dowodu oznaczono przez **D.**. Pojawiają się również symbole **R.**, **U.**, **W.** oraz **O.** informujące odpowiednio o początku rozwiązania, uwagi, wskazówki i odpowiedzi. Wszystkie tego rodzaju teksty zakończone są symbolem ⊠. Skrót "Odp." również oznacza odpowiedź.

Spis cytowanej literatury znajduje się na końcu tej książki (przed skorowidzami). Liczby pomiędzy nawiasami ⟨ oraz ⟩, występujące w tym spisie, oznaczają strony, na których dana pozycja jest cytowana. W pewnych podrozdziałach podano również literaturę dodatkową lub uzupełniającą. Informuje o tym symbol ★.

Seria "Podróże po Imperium Liczb" składa się z piętnastu nastpujących książek.

01. Liczby wymierne;
02. Cyfry liczb naturalnych;
03. Liczby kwadratowe;
04. Liczby pierwsze;
05. Funkcje arytmetyczne;
06. Podzielność w zbiorze liczb całkowitych;
07. Ciągi rekurencyjne;
08. Liczby Mersenne'a, Fermata i inne liczby;
09. Sześciany, bikwadraty i wyższe potęgi;
10. Liczby i funkcje rzeczywiste;
11. Silnie i symbole Newtona;
12. Wielomiany;
13. Nierówności;
14. Równanie Pella;
15. Liczby, funkcje, zbiory, geometria.

Wszystkie książki z serii "Podróże po Imperium Liczb" napisano w edytorze LaTeX. Spisy treści tych książek oraz pewne wybrane rozdziały moża znaleźć na internetowej stronie autora: `http://www.mat.uni.torun.pl/~anow`.

Wszystkie książki z serii "Podróże po Imperium Liczb" zostały wydane przez Wydawnictwo Naukowe Olsztyńskiej Wyższej Szkoły Informatyki i Zarządzania im. prof. Tadeusza Kotarbińskiego. Pierwsze wydania tych książek pojawiły się w latach 2008 – 2011. Autor otrzymał sporo interesujących listów z uwagami i komentarzami dotyczącymi omawianych zagadnień. Były też listy, w których wytknięto szereg pomyłek, błędów i niedokładności. Autorom tych wszystkich listów należą się szczere i serdeczne podziękowania.

Teraz, w tym drugim wydaniu książek serii "Podróże po Imperium Liczb", przesłane uwagi zostały uwzględnione. Naprawiono błędy, dołączono pewne dowody oraz podano nową aktualną literaturę. Wydanie to jest rozszerzone, uzupełnione i wzbogacone o pewne nowe rozdziały lub podrozdziały.



W drugiej książce z serii "Podróże po Imperium Liczb" zajmujemy się cyframi liczb naturalnych. Mówić będziemy głównie o cyfrach występujących w dziesiętnym systemie numeracji. Pojawią się również inne systemy numeracji. Nie rozważamy tu historii dotyczącej sposobu zapisywania liczb oraz nie zajmujemy się cyframi rozumianymi jako symbole lub znaki graficzne.

Książka ta składa się z dziesięciu rozdziałów. Spójrzmy na kilka typowych zagadnień omawianych w tych rozdziałach.

Łatwo stwierdzić, że istnieje liczba postaci 2^n rozpoczynająca się cyframi $2, 0, 4$. Mamy bowiem $2^{11} = 2048$. Okazuje się, że takich liczb 2^n jest nieskończenie wiele i liczba 2^{11} jest najmniejszą z nich. Czy istnieje taka liczba naturalna n, że cztery początkowe cyfry liczby 2^n są równe odpowiednio $2, 0, 1, 0$? Odpowiedź na to pytanie jest pozytywna. Nie jest trudno wykazać, że takich liczb n jest nieskończenie wiele. Jednakże najmniejszą z nich jest liczba $n = 10\,877$. Liczba $2^{10\,877}$ ma ponad trzy tysiące cyfr. Jej początkowe cztery cyfry to $2, 0, 1, 0$. Tego rodzaju informacje znajdziemy w rozdziale o potęgach dwójki. Są tu też rozdziały o potęgach trójki, piątki i innych liczb.

Cały rozdział 6 poświęcony jest początkowym cyfrom występującym w wyrazach klasycznych ciągów liczb naturalnych. Po przeczytaniu tego rozdziału będziemy przekonani, że - na przykład - istnieje taka liczba Fibonacciego, której 12 początkowych cyfr tworzy liczbę 2008 2009 2010. Trudno znaleźć choćby jedną taką liczbę (nawet przy pomocy komputera). My będziemy jednak wiedzieć, że taka liczba istnieje. Co więcej, takich liczb Fibonacciego jest nieskończenie wiele.

Dana liczba naturalna jest podzielna przez 9 dokładnie wtedy, gdy jej suma cyfr dzieli się przez 9. Stąd w szczególności wynika, że jeśli mamy liczbę podzielną przez 9 i poprzestawiamy w niej, w dowolny sposób, wszystkie cyfry, to otrzymana nowa liczba też będzie podzielna przez 9. Przestawiając cyfry nie zmieniamy bowiem sumy cyfr. Liczbom powstałym przez przestawianie cyfr poświęcony jest oddzielny podrozdział "Permutacje cyfr".

Cały rozdział 3 dotyczy sumy cyfr liczb naturalnych. Jeśli n jest liczbą naturalną, to przez $s(n)$ oznaczamy sumę wszystkich cyfr liczby n. Mamy na przykład: $s(4342) = 13$, $s(110112) = 6$. Liczby postaci $s(n)$ posiadają wiele interesujących własności. Wspomnijmy tu tylko o jednej z takich własności omawianych w tej książce. Załóżmy, że a i b są dowolnymi liczbami naturalnymi i rozpatrzmy ułamek

$$t(a, b) = \frac{s(a)+s(b)-s(a+b)}{9}.$$

Okazuje się, że ten ułamek jest nieujemną liczbą całkowitą, mówiącą o tym ile razy podczas pisemnego dodawania liczb a i b wkraczamy do "pamięci". Suma cyfr występuje również w rozdziale 5. W tym rozdziale zajmujemy się liczbami Nivena, czyli takimi liczbami naturalnymi, które są podzielne przez sumę swoich cyfr.

Dla danej liczby naturalnej n przez $\underline{n}$ oznaczmy liczbę naturalną powstałą z liczby n przez przestawienie jej ostatniej cyfry na początek. Przykładowo, jeśli $n = 12345$, to $\underline{n} = 51234$;

jeśli $n = 2230$, to $\underline{n} = 223$. Czy istnieje taka liczba naturalna n, że liczba $\underline{n}$ jest 6 razy większa od liczby n? Odpowiedź jest pozytywna. Taką liczbą n jest na przykład

$$1016949152542372881355932203389830508474576271186440677966.$$

Powyższa liczba ma 58 cyfr. Jest to najmniejsza liczba posiadająca omawianą własność. Łatwo dowodzi się, że takich liczb jest nieskończenie wiele.

Spójrzmy na następujące równości:

$$\begin{aligned} 371 &= 3^3 + 7^3 + 1^3, \\ 1634 &= 1^4 + 6^4 + 3^4 + 4^4, \\ 4151 &= 4^5 + 1^5 + 5^5 + 1^5, \\ 145 &= 1! + 4! + 5!. \end{aligned}$$

Tego typu równościami zajmujemy się w rozdziale 4. Z tego rozdziału dowiemy się jakie szczególne własności posiadają, na przykład, liczby 145 i 153. Jest tu też podrozdział o liczbach szczęśliwych.

Wspomnieliśmy tylko o kilku zagadnieniach omawianych w tej książce. Takich zagadnień jest tu znacznie więcej.

1 Wstępne informacje i ciekawostki o cyfrach

1.1 Cyfry i kolejne liczby naturalne

1.1.1. *Na tablicy napisano wszystkie liczby naturalne mniejsze od* 100 :

$$1,\ 2,\ \ldots,\ 9,\ 10,\ 11,\ 12,\ \ldots,\ 98,\ 99.$$

Ile razy pojawiła się cyfra 7 *?*

Wśród liczb jednocyfrowych siódemka pojawi się tylko raz. Dwucyfrowymi liczbami z siódemkami są: $17, 27, 37, 47, 57, 67, 77, 87, 97$ oraz $70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 78, 79$ (liczba 77 ma dwie siódemki). Tych siódemek jest więc $1 + 10 + 9$, czyli 20. Możemy zatem podać odpowiedzź: siódemka pojawiła się dokładnie 20 razy. Tak samo jest z jedynką, piątką, ósemką itd. Każda niezerowa cyfra występuje dokładnie 20 razy. Natomiast zero pojawia się 9 razy: $10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90$.

Rozważaliśmy liczby mniejsze od 100. To samo zagadnienie dla liczb mniejszych od 1000 przedstawia się tak: każda niezerowa cyfra występuje dokładnie 300 razy, a zero 189 razy. Łatwo to uogólnić:

1.1.2. *Niech $h_n(c)$ oznacza liczbę wystąpień cyfry c w zapisach dziętnych wszystkich liczb naturalnych mniejszych od 10^n. Mamy wówczas równości:*

$$\begin{aligned} h_n(0) &= (n-1)10^{n-1} - \tfrac{1}{9}(10^{n-1}-1), \\ h_n(c) &= n10^{n-1}, \quad \textit{gdy} \ \ c \neq 0. \end{aligned}$$

1.1.3. *Niech $g_n(c)$, gdzie $c = 0, 1, \ldots, 9$, oznacza liczbę wystąpień cyfry c w zapisach dziesiętnych wszystkich liczb naturalnych od 1 do 10^n. Zachodzą wówczas następujące równości:*

$$\begin{aligned} g_n(0) &= (n-1)10^{n-1} - \tfrac{1}{9}(10^{n-1}-1) + n, \\ g_n(1) &= n10^{n-1} + 1, \\ g_n(c) &= n10^{n-1} \quad \textit{dla} \ \ c = 2, 3, \ldots, 9. \end{aligned}$$

([Mat] 2/1951 57).

1.1.4. *Niech s_n oznacza liczbę wszystkich cyfr występujących w zapisach dziesiętnych wszystkich liczb naturalnych mniejszych od 10^n Mamy wówczas: $s_0 = 0$, $s_1 = 9$, $s_2 = 189$, $s_3 = 2889$, $s_4 = 38889$, $s_5 = 488889$ i ogólnie*

$$s_n = n10^n - \frac{1}{9}(10^n - 1) = n10^n - \underbrace{11\ldots11}_{n}.$$

([Mat] 2/1951 62, [Str67] 11).

1.1.5. *Liczba wszystkich cyfr ciągu $1, 2, 3, \ldots, 10^n$ jest równa liczbie wszystkich zer występujących w ciągu $1, 2, 3, \ldots, 10^{n+1}$.* ([GaT] 39/57).

1.1.6. *Dany jest ciąg cyfr:* $123456789101112131415\cdots$.

(1) *Jaka cyfra stoi na* 2000 *miejscu?* Odp. 0. ([Mock] 3/2000).

(2) *Jaka cyfra stoi na* 1 000 000 *miejscu?* Odp. 1. ([OM] Australia 1995).

(3) *Jaka cyfra stoi na n-tym miejscu ?*

O. (3) (G. Bartczak 1996). Niech m będzie liczbą naturalną spełniającą nierówności $s_{m-1} < n \leqslant s_m$, gdzie s_m jest liczbą wszystkich cyfr liczb co najwyżej m-cyfrowych (patrz 1.1.4). Jeśli $n-s_{m-1} \equiv 0 \pmod{m}$, to szukaną cyfrą jest ostatnia cyfra liczby $10^{m-1} - 1 + (n - s_{m-1})/m$. Jeśli $n - s_{m-1} \equiv k \pmod{m}$, gdzie $0 < k < m$, to szukaną cyfrą jest k-ta cyfra liczby $10^{m-1} + c$, gdzie c jest częścią całkowitą liczby $\frac{n-s_{m-1}}{m}$. ⊠

1.1.7. *Dana jest liczba* $n_1 = 123456789101112131415\ldots19941995$. *Skreślono wszystkie cyfry liczby* n_1 *stojące na parzystych miejscach. Powstała liczba* n_2. *W liczbie* n_2 *skreślono wszystkie cyfry stojące na nieparzystych miejscach i powstała liczba* n_3. *W liczbie* n_3 *skreślono wszystkie cyfry stojące na parzystych miejscach i powstała liczba* n_4. *Proces ten kontynuowano, aż została liczba jednocyfrowa* n_s. *Znaleźć* n_s. Odp. $n_s = 9$. ([OM] Australia 1995).

1.1.8. *Dana jest liczba* $12345678910111213\ldots9989991000$. *Wybieramy dwie sąsiednie cyfry* a, b (a *stoi przed* b) *i w miejsce tych cyfr wstawiamy liczbę* $a + 2b$ (*można za* a *wziąć zero stojące przed całą liczbą, a za* b *pierwszą cyfrę*). *Z otrzymaną nową liczbą postępujemy tak samo, itd. Wykazać, że w ten sposób można otrzymać liczbę* 1. ([GaT] 22/69).

1.1.9. *Dana jest liczba* $12345678910111213\ldots9989991000$. *Mnożymy tę liczbę przez jedną z liczb od* 1 *do* 9 *i w iloczynie skreślamy wszystkie jedynki. Z otrzymaną nową liczbą postępujemy podobnie, itd. Jaką najmniejszą liczbę można w ten sposób otrzymać?* Odp. 0. ([GaT] 41/70).

1.1.10. *Dana jest liczba* $1234567891011121314\ldots585960$.

(1) *Skreślić* 100 *cyfr tak, by otrzymać liczbę najmniejszą.* ([DyM] 22a).

(2) *Skreślić* 100 *cyfr tak, by otrzymać liczbę największą.* ([DyM] 22b).

O. Liczba najmniejsza: 00000123450. Liczba największa: 99999785960. ⊠

1.1.11. *Wszystkie pięciocyfrowe liczby od* 11111 *do* 99999 *ustawiono w dowolnym porządku w jeden ciąg. Powstała* 444 445*-cyfrowa liczba. Wykazać, że liczba ta nie jest potęgą dwójki.* ([Kw] 7/1971 32, [WaJ] 141(70)).

1.1.12. *Do ponumerowania stronic pewnej książki potrzeba* n *razy tyle cyfr, ile jest stronic. Ile stronic ma ta książka?* ([Mat] 3/1952 55).

R. Zadanie ma kilka rozwiązań. Jeśli $n = 1$, to liczba stronic może być równa $1, 2, \ldots, 9$. Jeśli $n = 2$ lub $n = 3$, to liczba stronic może być odpowiednio równa 108 lub 1107. Jeśli n jest dowolną liczbą naturalną, to liczba stronic może być równa $\frac{1}{9}(10^{n+1} - 1) - n - 1$. ([Mat] 3/1952 55). ⊠

1.1.13. *Wypisano w układzie dziesiętnym ciąg liczb naturalnych* $1, 2, \ldots, n$. *W ciągu tym liczba liczb, w których występuje cyfra* c *jest równa liczbie liczb, w których cyfra* c *nie występuje. Wyznaczyć* n *biorąc kolejno* $c = 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0$. ([Mat] 1/1952 57).

1.1.14. *Na długiej tablicy napisano* 450*-cyfrową liczbę* 123456789123456789 . . . (*50 razy powtarza się grupa cyfr* 123456789)*. Usunięto z tej tablicy wszystkie cyfry stojące na nieparzystych miejscach. Z otrzymaną nową liczbą zrobiono to samo, usunięto wszystkie cyfry na nieparzystych miejscach, i.t.d. Jaka cyfra pozostanie na końcu?* Odp. 4. ([OM] Leningrad 1990).

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

1.2 Zera i liczby bezzerowe

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

1.2.1. *Dla każdej liczby naturalnej n, względnie pierwszej z* 10*, istnieje liczba postaci* $11\dots1$ *podzielna przez n.*

D. Oznaczmy przez e_m liczbę m-cyfrową $11\dots1$ (zbudowaną z samych jedynek).

Niech $n \in \mathbb{N}$. Rozpatrzmy liczby $e_1, e_2, \dots, e_n, e_{n+1}$. Wśród tych liczb istnieją co najmniej dwie takie, powiedzmy e_a i e_b, gdzie $a < b$, których reszty z dzielenia przez n są jednakowe (gdyż tych liczb jest więcej niż wszystkich możliwych reszt). Wtedy liczba $e_b - e_a$ jest podzielna przez n. Zauważmy, że $e_b - e_a = e_{b-a}10^a$. Ponieważ $\text{nwd}(n, 10) = 1$, więc liczba e_{b-a} jest podzielna przez n. ⊠

U. W tym dowodzie wykorzystaliśmy zasadę szufladkową Dirichleta. Można to również szybko wykazać za pomocą twierdzenia Eulera. Ponieważ $(n, 10) = 1$ oraz $(9, 10) = 1$, więc $(9n, 10) = 1$. Z twierdzenia Eulera mamy: $9n \mid 10^{\varphi(9n)} - 1$. Zatem $n \mid \frac{10^{\varphi(9n)}-1}{9} = e_{\varphi(9n)}$. ⊠

1.2.2. *Każda liczba naturalna, względnie pierwsza z* 10*, jest dzielnikiem pewnej liczby postaci* $10101\dots01$. ([Bed4]).

D. Niech b_n oznacza liczbę $10101\dots01$, w której jest n jedynek. Niech $m \in \mathbb{N}$, $(m, 10) = 1$. Ponieważ $(99, 100) = 1$, więc $(99m, 100) = 1$. Z twierdzenia Eulera mamy: $99m \mid 100^{\varphi(99m)} - 1$. Zatem m dzieli $\frac{100^{\varphi(9m)}-1}{99} = b_{\varphi(99m)}$. ⊠

W podobny sposób dowodzimy inne tego typu stwierdzenia. Mamy na przykład:

1.2.3. *Każda liczba naturalna, względnie pierwsza z* 10*, jest dzielnikiem pewnej liczby postaci* $1001001\dots001$.

1.2.4. *Czy każda liczba naturalna, względnie pierwsza z* 30*, jest dzielnikiem pewnej liczby postaci* $12121\dots21$ *?*

1.2.5. *Wykazać, że istnieje liczba naturalna podzielna przez* 1993*, której zapis dziesiętny ma tylko zera i siódemki.*

1.2.6. *Jeśli ostatnią cyfrą liczby naturalnej n nie jest zero, to istnieje liczba naturalna q taka, że każda cyfra liczby qn jest różna od zera.* ([GaT] s.214, [AnAF] 129).

1.2.7. *Niech $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 3$, $\text{nwd}(n, 10) = 1$. Istnieje $(n-2)$-cyfrowa liczba naturalna zbudowana z jedynek i trójek, która jest podzielna przez n.* ([OM] St Petersburg 1995).

1.2.8. *Dla dowolnej liczby naturalnej $n \geqslant 10^5$ istnieje taka liczba naturalna $m < n$, że zapis dziesiętny liczby mn nie posiada żadnej piątki.* ([Zw] 2002).

1.2.9. *Jeśli liczba naturalna dzieli się przez* 999 999 999, *to ma co najmniej* 8 *cyfr różnych od zera.* ([GaT] 21/70).

1.2.10. *Jeśli liczba naturalna dzieli się przez* 10 101 010 101, *to ma co najmniej* 6 *cyfr różnych od zera.* ([Kw] 6/1971 35, [GaT] 36/70).

1.2.11. *Dla każdej liczby naturalnej n istnieje liczba pierwsza mająca w zapisie dziesiętnym co najmniej n zer.* ([S64] 100).

W. Wykorzystać twierdzenie Dirichleta o liczbach pierwszych w postępie arytmetycznym. ⊠

1.2.12. *Nie istnieje nieskończony ciąg arytmetyczny rosnący, którego wszystkie wyrazy są bezzerowymi liczbami naturalnymi.* ([Mat] 3/1962 129).

D. Wynika to np. z tego, że każdy rosnący postęp arytmetyczny o wyrazach naturalnych posiada wyrazy o dowolnych początkowych cyfrach (patrz 6.4.1 lub 6.4.2). ⊠

1.2.13. *Naturalną liczbę można pomnożyć przez dowolną liczbę naturalną lub można skreślić zera w jej zapisie dziesiętnym. Wykazać, że przy pomocy tych operacji można z dowolnej liczby naturalnej otrzymać liczbę jednocyfrową.* ([OM] Leningrad 1991).

D. Niech n będzie dowolną liczbą naturalną. Przy pomocy mnożeń przez 2 i 5 oraz skreślaniu zer otrzymujemy liczbę względnie pierwszą z 2 i 5. Mnożąc to przez odpowiednią liczbę otrzymujemy liczbę zbudowaną z samych jedynek (patrz 1.2.1). Mnożąc to przez 82 otrzymujemy $911\dots1102$. Skreślając zero i mnożąc przez 9 otrzymujemy $8200\dots08$. Skreślając zera mamy 882. Mnożąc przez 25 i skreślając zera mamy 27. Mnożymy przez 4 mamy 108. Po skreśleniu zera otrzymujemy 18. Mnożąc przez 5 mamy 90 i stąd 9. ⊠

U. Wykazaliśmy, że startując od dowolnej liczby naturalnej zawsze dojdziemy do liczby 9. Spójrzmy w jaki sposób można dojść do dziewiątki, gdy startujemy od liczby jednocyfrowej.

$$
\begin{array}{lllllllllll}
1 & \mapsto & 9 \\
2 & \mapsto & 10 & \mapsto & 1 & \mapsto & 9 \\
3 & \mapsto & 9 \\
4 & \mapsto & 100 & \mapsto & 1 & \mapsto & 9 \\
5 & \mapsto & 10 & \mapsto & 1 & \mapsto & 9 \\
6 & \mapsto & 30 & \mapsto & 3 & \mapsto & 9 \\
7 & \mapsto & 105 & \mapsto & 15 & \mapsto & 90 & \mapsto 9 \\
8 & \mapsto & 40 & \mapsto & 4 & \mapsto & 100 & \mapsto 1 & \mapsto & 9.
\end{array}
$$

Zwróćmy uwagę, że startując od liczby 9 nigdy w ten sposób nie dojdziemy, na przykład, do jedynki. Jeśli początkowa liczba jest podzielna przez 3, to przy pomocy rozpatrywanych operacji otrzymujemy liczby podzielne przez 3. ⊠

★ W. Sierpiński, *O liczbach bezzerowych*, [Mat] 3/1962 129-131.

---

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo
1.3 Ostatnie cyfry
oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

1.3.1. *Niech $c_1, \dots, c_s$ będzie dowolnym ciągiem cyfr układu dziesiętnego. W każdym ciągu arytmetycznym (a_n) o wyrazach naturalnych i różnicy r względnie pierwszej z 10 istnieje nieskończenie wiele wyrazów, których s końcowymi cyframi są odpowiednio cyfry $c_1, \dots, c_s$.* ([Mat] z.1497).

D. Zauważmy najpierw, że reszty z dzielenia liczb $a_1, a_2, \dots, a_{10^s}$ przez 10^s są parami różne. Aby się o tym przekonać przypuśćmy, że istnieją takie dwie różne liczby $p, q \in \{1, 2, \dots, 10^s\}$, że reszty z dzielenia przez 10^s liczb a_p i a_q są identyczne. Wtedy $p \neq q$ oraz $10^s \mid a_p - a_q = (p - q)r$. Wtedy niezerowa liczba $|p - q|$ dzieli się przez 10^s (gdyż $\text{nwd}(r, 10^s) = 1$). Ale to jest niemożliwe, gdyż liczba $|p - q|$ jest ostro mniejsza od 10^s.

Z powyższego wynika, że jeśli m jest nieujemną liczbą całkowitą mniejszą od 10^s, to wśród liczb $a_1, a_2, \dots, a_{10^s}$ istnieje dokładnie jedna taka, której reszta z dzielenia przez 10^s jest równa m. W szczególności zachodzi to dla liczby $m = c_1 10^{s-1} + c_2 10^{s-2} + \dots + c_{s-1} 10 + c_s$. Jest to bowiem nieujemna liczba całkowita mniejsza od 10^s. Istnieje więc n_0 takie, że $a_{n_0} \equiv m \pmod{10^s}$ czyli, że s końcowymi cyframi liczby a_{n_0} są odpowiednio cyfry $c_1, \dots, c_s$.

Każdy wyraz a_n dla $n = n_0 + i10^s$, gdzie $i = 0, 1, 2, \dots$, też ma rozważaną własność. Zatem takich wyrazów jest nieskończenie wiele. ⊠

1.3.2. *Znaleźć trzy ostatnie cyfry liczby* $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots 1999$. Odp. 625. ([OM] Litwa 1993).

1.3.3. *Istnieje liczba naturalna podzielna przez* 1999 *mająca na końcu cyfry* 1995. ([OM] Chorwacja 1995).

1.3.4. *Niech q, t, k będą liczbami naturalnymi większymi od 1. Następujące dwa zdania są równoważne.*

(1) *W systemie numeracji o podstawie q istnieje t-cyfrowa liczba n taka, że liczba n^k kończy się cyframi liczby n.*

(2) *Liczba q nie jest potęgą liczby pierwszej oraz* $\text{nwd}(k - 1, \varphi(q^t)) = 1$.

([Mon] 6-7/1980 E2776).

1.3.5. *Czy jeśli n jest sześciocyfrową liczbą naturalną, to co najmniej jedna z liczb*

$$n, \ 2n, \ \dots, \ 500\,000n$$

ma na końcu sześć identycznych cyfr? Przykład: liczba $n = 127\,553$ spełnia ten warunek, gdyż $127\,553 \cdot 38087 = 4858111111$. ([TTja] 1996).

1.3.6. *Znaleźć najmniejszą liczbę naturalną podzielną przez* 111, *której ostatnimi cyframi są* 2, 0, 0, 4. ([KoM] 2004 C785).

1.3.7. *Niech $c(n)$ oznacza ostatnią cyfrę liczby naturalnej n. Dla danej liczby naturalnej a określamy ciąg (a_n), przyjmując $a_1 = a$ oraz $a_{n+1} = a_n + c(a_n)$. Niech d będzie dowolną liczbą naturalną niepodzielną przez 5. Wtedy ciąg (a_n) jest albo od pewnego miejsca stały, albo zawiera nieskończenie wiele wyrazów podzielnych przez d.* ([AuP] 2004).

1.3.8. *Do danej liczby naturalnej dodajemy* 54 *lub* 77*. Wykazać, że powtarzając tę operację dochodzimy do liczby, która na końcu ma dwie jednakowe cyfry.* ([OM] St Petersburg 1992).

1.3.9. *Funkcja* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}_0$ *spełnia następujące trzy warunki.*

(1) $f(ab) = f(a) + f(b)$ *dla* $a, b \in \mathbb{N}$.
(2) $f(n) = 0$ *jeśli* $n \in \mathbb{N}$ *i ostatnią cyfrą liczby* n *jest* 3.
(3) $f(10) = 0$.

Wykazać, że $f(n) = 0$ *dla wszystkich* $n \in \mathbb{N}$. ([MOc] 2002 z.129).

1.3.10. *Niech* $a_0 = 1$, $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ *oraz niech* a_{n+3} (*dla* $n \leqslant 0$) *będzie ostatnią cyfrą liczby* $a_n + a_{n+1} + a_{n+2}$*. Mamy wtedy ciąg cyfr* $1124734419447\cdots$ *. Czy w tym ciągu pojawi się blok cyfrowy* 1001 *?* ([Uiuc] 2007).

D. Taki blok się pojawi. Aby się o tym przekonać zauważmy najpierw, że ciąg (a_n) jest okresowy. Ponadto $a_{n-1} \equiv a_{n+2} - a_{n+1} - a_n \pmod{10}$, więc $a_{-1} = 0$, $a_{-2} = 0$, $a_{-3} = 1$. Blok cyfrowy $a_{-3}a_{-2}a_{-1}a_0$ jest równy 1001. Miejsca o numerach od 121 do 124 również tworzą blok 1001. ⊠

★ S. Parameswaran, *On the end digits of numbers*, [MG] 30(289)(1946) 99-102.
M. Szterenberg, *Zadania "Ostatnie cyfry"*, [Kw] 8/1977 26.

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

1.4 Skreślanie cyfr

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

Jeśli n jest liczbą naturalną, to przez n_1 oznaczamy liczbę naturalną powstałą z liczby n przez skreślenie pierwszej cyfry.

1.4.1. *Jeśli pierwszą cyfrą liczby* n *jest* 6 *oraz* $n = 25n_1$, *to* $n = 625$ *lub* n *jest postaci* $62500\ldots0$. ([ShCY] z.16).

1.4.2. *Nie ma takiej liczby naturalnej* n, *że* $n = 35n_1$. ([ShCY] z.16).

1.4.3. *Znaleźć co najmniej jedną liczbę naturalną* n *taką, że* $n = 57n_1$. Odp. *Każda liczba postaci* $712500\ldots0$ *ma taką własność.* ([Ko02]).

1.4.4. *Niech* a *będzie cyfrą i niech* s *będzie liczbą naturalną. Następujące warunki są równoważne.*

(*a*) *Istnieje liczba naturalna* n *rozpoczynająca się cyfrą* a *i spełniająca równość* $n = sn_1$.
(*b*) $a < s - 1$ *oraz* $s = 2^p5^qd + 1$, *gdzie* $p, q \geqslant 0$, $d \geqslant 1$ *i* $d \mid a$. ([ShCY] s.103).

D. (a) $\Rightarrow$ (b). Liczba n jest postaci $n = a10^r + y$, gdzie $y < 10^r$. Ponieważ $n = sn_1$, więc $a10^r + y = sy$, czyli $a10^r = (s-1)y$. Liczba $s-1$ dzieli liczbę $a10^r$, zatem $s - 1 = 2^p5^qd$, gdzie $p, q \geqslant 0$, $d \geqslant 1$ i $d \mid a$. Z nierówności $y < 10^r$ otrzymujemy, że $10^ra = (s-1)y < (s-1)10^r$ i stąd $a < s - 1$.

(b) $\Rightarrow$ (a) Niech $a < s - 1$ i niech $s = 2^p5^qd + 1$, gdzie $p, q \geqslant 0$, $d \geqslant 1$ i $d \mid a$. Niech $r = \max(p, q)$ i niech $n = 10^sa + \frac{a}{d}2^{s-p}5^{s-q}$. Wtedy $n = sn_1$ i pierwszą cyfrą liczby n jest a. ⊠

1.4.5.

(1) *Nie ma takiej liczby naturalnej* n, *że* $n = 2n_1$.

(2) *Jeśli* $n = 3n_1$, *to* $n = 15 \cdot 10^m$, $m = 0, 1, 2 \cdots$.

(3) *Nie ma takiej liczby naturalnej* n, *że* $n = 4n_1$.

(4) *Jeśli* $n = 5n_1$ *i* $10 \nmid n$, *to* n *jest jedną z liczb* $125, 25, 375$.

(5) *Jeśli* $n = 6n_1$ *i* $10 \nmid n$, *to* n *jest jedną z liczb* $12, 24, 36, 48$.

(6) *Jeśli* $n = 7n_1$ *i* $10 \nmid n$, *to* $n = 35$.

(7) *Nie ma takiej liczby naturalnej* n, *że* $n = 8n_1$.

(8) *Jeśli* $n = 9n_1$ *i* $10 \nmid n$, *to* n *jest jedną z liczb* $1125, 225, 3375, 45, 5625, 675, 7875$

D. Wynika to łatwo z faktu 1.4.4 i jego dowodu. ⊠

Jeśli n jest liczbą naturalną, to przez n_o oznaczamy liczbę naturalną powstałą z liczby n przez skreślenie ostatniej cyfry.

1.4.6. *Jeśli* $n_o \mid n$, *to* $\frac{n}{n_o}$ *jest jedną z liczb* $10, 11, 12, \dots, 19$. ([ShCY] z.15).

1.4.7. *Znaleźć wszystkie liczby naturalne* n *takie, że* $n_o \mid n$. ([ShCY] z.15).

O. Wszystkie liczby z zerową ostatnią cyfrą (wtedy $n/n_o = 10$). Ponadto: $11, 22, \dots, 99$ ($n/n_o = 11$); $12, 24, 36, 48$ ($n/n_o = 12$); $13, 26, 39$ ($n/n_o = 13$); $14, 28$ ($n/n_o = 14$) oraz $15, 16, 17, 18, 19$ ($n/n_o = 15, 16, 17, 18, 19$), ⊠

1.4.8. *Niech* n_2 *oznacza liczbę naturalną powstałą z liczby naturalnej* n *przez skreślenie drugiej cyfry. Znaleźć wszystkie liczby naturalne* n *takie, że* $n_2 \mid n$. ([ShCY] z.18).

O. ([ShCY] s107). Są 104 takie liczby niepodzielne przez 10:

$11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 105, 108, 121, 132, 135, 143, 154, 165, 176, 187, 192, 195, 198,$
$1125, 1575, 1625, 10125, 12375, 14625, 16875, 19125, 19125,$

$22, 24, 26, 225, 231, 242, 253, 264, 275, 286, 297, 2025, 2425, 2925, 21375, 23625, 25875,$

$33, 36, 39, 315, 341, 352, 363, 374, 385, 396, 3375, 30725, 32625, 34875,$

$44, 48, 405, 451, 462, 473, 484, 495, 4275, 41625, 43875,$

$55, 561, 572, 583, 594, 5175, 50625, 52875,$

$66, 671, 682, 693, 6075, 61875,$

$77, 781, 792,$

$88, 891,$

$99.$

Pozostałe rozwiązania otrzymujemy dopisując do powyższych rozwiązań zera. ⊠

1.4.9. *Niech* n_3 *oznacza liczbę naturalną powstałą z liczby naturalnej* n *przez skreślenie trzeciej cyfry. Znaleźć wszystkie liczby naturalne* n *takie, że* $n_3 \mid n$. ([ShCY] z.18).

O. Są to wszystkie liczby n, które dwie pierwsze cyfry mają dowolne, a pozostałymi cyframi są zera. ⊠

1.4.10. *Niech* n_k *oznacza liczbę naturalną powstałą z liczby naturalnej* n *przez skreślenie* k*-tej cyfry. Niech* $k \geqslant 3$. *Znaleźć wszystkie liczby naturalne* n *takie, że* $n_k \mid n$. ([ShCY] z.18).

O. Są to wszystkie liczby naturalne n, których początkowe $k-1$ cyfry są dowolne, a pozostałymi cyframi są zera. ⊠

---

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

1.5 Dopisywanie cyfr

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

W tym podrozdziale mówić będziemy, że dana liczba naturalna jest *specjalna*, jeśli w jej zapisie dziesiętnym pewna początkowa grupa cyfr pokrywa się z końcową grupą cyfr. Na przykład liczby $1971, 19219$ są specjalne, a liczba 1415145 nie.

Spójrzmy na liczbę 101. Jest to liczba specjalna zbudowana z cyfr 0 i 1. Jeśli z prawej jej strony dopiszemy 0 otrzymamy liczbę specjalną 1010. Jeśli natomiast dopiszemy 1, to również otrzymamy liczbę specjalną, mianowicie 1011. Podobną własność ma liczba 2120212. Jest ona zbudowana z cyfr $0, 1, 2$ i po dopisaniu z prawej strony każdej z tych cyfr, otrzymujemy liczby specjalne:

$$\underline{2120}\,\underline{2120}, \quad \underline{21}\,2021\,\underline{21}, \quad \underline{2}\,120212\,\underline{2}.$$

1.5.1. *Wykazać, że istnieje taka liczba naturalna, że dopisując do niej na końcu dowolną cyfrę $0, 1, 2, \ldots$ lub 9 otrzymamy zawsze liczbę specjalną.* ([Kw] 1/1979 32).

D. ([Kw]). Niech $a_1 = 101$ oraz $a_2 = 2120212$. Dopiszmy z prawej strony każdej cyfry liczby a_2 trójkę i na poątku również dopiszmy trójkę. Otrzymaną w ten sposób nową liczbę oznaczmy przez a_3. Mamy więc: $a_3 = 323132303231323$. Z liczbą a_3 zróbmy podobnie. Dopiszmy w odpowiednich miejscach czwórki:

$$a_4 = 4342434143424340434243414342434.$$

Kontynuując to postępowanie otrzymujemy liczbę a_9, spełniającą warunek tego zadania. Liczba a_9 ma $2^{10} - 1 = 1023$ cyfr. ⊠

1.5.2. *Znaleźć liczbę naturalną $n > 1$ taką, że dowolna liczba n-cyfrowa zapisana trzy razy z rzędu tworzy liczbę $3n$-cyfrową podzielną przez n^2.* ([Zw] 2000).

O. Taką liczbą jest $n = 37$. Wynika to z tego, że $37^2 \mid 10^{74} + 10^{37} + 1$. ⊠

1.5.3. *Niech $a_1 = 0$, $a_2 = 1$. Dla $n \geqslant 3$ definiujemy liczbę a_n dopisując do liczby a_{n-1} cyfry liczby a_{n-2}. Przykłady: $a_3 = 10$, $a_4 = 101$, $a_5 = 10110$. Wtedy $11 \mid a_n \iff n \equiv 1 \pmod 6$.* ([Putn] 1998).

1.5.4. *Jeśli n jest liczbą naturalną, to*

(*a*) *dopisujemy jej na końcu cyfrę 4 lub*
(*b*) *dopisujemy jej na końcu cyfrę 0 lub*
(*c*) *dzielimy przez 2 jeśli jest parzysta.*

Operacje te powtarzamy kilka razy.

(1) *Czy startując od 4 można otrzymać 1972?*

(2) *Wykazać, że startując od 4 można otrzymać każdą liczbę naturalną.* ([Kw] 12/1972 40).

---

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

1.6 Występowanie wszystkich cyfr

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

1.6.1. ([Jel]). $2 \cdot 123456789 = 246913578$, $4 \cdot 123456789 = 493827156$, $5 \cdot 123456789 = 617283945$, $7 \cdot 123456789 = 864197523$, $8 \cdot 123456789 = 987654312$.

1.6.2. *W następujących mnożeniach występują wszystkie cyfry:* $4 \cdot 3907 = 15628$, $3 \cdot 6819 = 20457$, $4 \cdot 7039 = 28156$, $6 \cdot 5817 = 34902$, $7 \cdot 9405 = 65821$. ([Je88]).

1.6.3. *Najmniejszą pięciocyfrową liczbą n taką, że w liczbach n i $2n$ razem występują wszystkie cyfry jest $n = 13485$ (wtedy $2n = 26970$). Liczby 13548, 13845 i 13538 posiadają również tę własność.* ([UsaT] 2000).

1.6.4. *Czterocyfrową liczbą n taką, że w liczbach n i $2n$ razem występują wszystkie niezerowe cyfry jest $n = 6729$ (wtedy $2n = 13458$).* ([Mon] 42(9)(1935) E148).

1.6.5. *Każda liczba naturalna posiada wielokrotność, w której występują wszystkie cyfry systemu dziesiętnego.* ([Putn] 1956, [Mon] 64(1)(1957)).

D. Niech $n \in \mathbb{N}$. Niech $k \in \mathbb{N}$ takie, że $10^k > n$. Niech $u = 1234567890 \cdot 10^k$. Wtedy wszystkie liczby $u+1,\ u+2,\ \dots,\ u+n$ mają zapis dziesiętny postaci $1234567890\cdots$. Wśród nich jedna jest podzielna przez n. ⊠

1.6.6. *Dziesięciocyfrowa liczba naturalna ma wszystkie cyfry $0, 1, 2, \dots, 9$. Wykazać, że ona nie dzieli się przez 11.* ([Ko02]).

1.6.7. *Liczba 3816547290 ma następujące własności.*

(*a*) *Występują wszystkie cyfry.*

(*b*) *Liczba utworzona z pierwszych dwóch cyfr dzieli się przez 2, liczba utworzona z pierwszych trzech cyfr dzieli się przez 3, liczba utworzona z pierwszych czterech cyfr dzieli się przez 4, itd., aż do dziesięciu.*

(*c*) *Jest to jedyna liczba o powyższych własnościach.* ([UsaT] 1999/2000, [Ko02]).

1.6.8. *Wykazać, że istnieje para (n, m) dziewięciocyfrowych liczb naturalnych takich, że $n < m$, liczby n i m posiadają wszystkie niezerowe cyfry oraz $n + m = 987654321$. Wykazać, że liczba takich par jest nieparzysta.* ([TTsa] 1983).

1.6.9. *Każdy postęp arytmetyczny 73 liczb naturalnych posiada wyraz, w którym występuje cyfra 9. Istnieje ciąg arytmetyczny 72 liczb naturalnych, którego każdy wyraz nie posiada cyfry 9.* ([TT] Autumn 1991).

1.6.10. *Niech $a_1 < a_2 < \cdots < a_m$ będzie skończonym ciągiem arytmetycznym o wyrazach naturalnych nie zawierających (w zapisie dziesiętnym) cyfry c. Wykazać, że jeśli $c \neq 0$, to $m \leqslant 72$, a jeśli $c = 0$, to $m \leqslant 80$.* ([Kw] 6/1992 24).

1.6.11. *Każdą liczbę naturalną można jednoznacznie przedstawić w postaci $a - b$, gdzie a i b są takimi nieujemnymi liczbami całkowitymi, które w rozwinięciu trójkowym nie posiadają żadnej cyfry równej 2.* ([Kw] 6/1970 9).

---

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

1.7 Cyfry i podzielność

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

1.7.1. *Żadna liczba sześciocyfrowa o różnych cyfrach ze zbioru* $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ *nie jest podzielna przez* 11. ([Pa02] 58).

1.7.2. *Dla każdej liczby naturalnej* $n > 10$, *której wszystkie cyfry należą do zbioru* $\{1, 3, 7, 9\}$ *istnieje liczba pierwsza* $\geqslant 11$ *dzieląca* n. ([Ibe] 1999).

1.7.3. *Jeśli w zapisie*

$$3 * 4 * 1 * 0 * 8 * 2 * 40923 * 0 * 320 * 2 * 56$$

w miejsce gwiazdek wstawimy w dowolnej kolejności cyfry $0, 1, 2, \ldots, 9$ (*każdą jeden raz*), *to otrzymana liczba będzie podzielna przez* 396. ([WyKM] 380-63).

1.7.4. *Czy istnieje liczba naturalna, której każda wielokrotność ma albo wszystkie cyfry parzyste, albo wszystkie cyfry nieparzyste?* Odp. *Nie istnieje.* ([Dlt] 8/1984 15).

1.7.5. *Dany jest nieskończony ciąg cyfr. Dla każdej liczby naturalnej* n, *względnie pierwszej z* 10, *istnieje grupa kolejnych wyrazów tego ciągu tworzących nieujemną liczbę całkowitą podzielną przez* n. ([Kw] 2/1974 38).

1.7.6. *Znaleźć największą liczbę naturalną mającą cyfry parami różne i dzielącą się przez każdą ze swych cyfr.* Odp. 9867312. ([Dlt] 2/1984).

1.7.7. *Istnieje wielokrotność liczby* 2004, *której zapis dziesiętny wykorzystuje tylko jedną cyfrę. Taką wielokrotnością jest* $44\ldots4$ (2988 *czwórek*). ([Mock] 3/2004).

1.7.8. *Istnieje liczba postaci* $199\ldots91$, *gdzie liczba dziewiątek jest większa od* 2, *podzielna przez* 1991. ([OM] Brazylia 1991).

1.7.9. *Istnieje liczba postaci* $7991\,7991\,\ldots\,7991$ *podzielna przez* 1997. ([MG] 81(492)(1997)).

1.7.10. *Niech* $a_n = 101010\ldots0101$ ($n+1$ *jedynek*). *Znaleźć najmniejsze* n *takie, że liczba* a_n *jest podzielna przez* 9999. Odp. $n = 197$. ([MOc] 2004 z.294).

1.7.11. *Żadna liczba postaci* $10\ldots001$ *nie dzieli się przez* 31. ([Kw] 2/2000 s.25).

1.7.12. *Jeśli liczba* $\underbrace{11\ldots11}_{n}2\underbrace{11\ldots11}_{n}$ *jest podzielna przez* 11, *to jest podzielna przez* 121. ([Kw] 2/2006 M1966).

1.7.13. *Znaleźć liczbę siedmiocyfrową, której wszystkie cyfry są różne i która jest podzielna przez wszystkie te cyfry.* ([Ko02]).

R. 7329168 lub 7639128. Są jeszcze inne. ⊠

1.7.14. *Znaleźć najmniejszą liczbę naturalną mającą dzielniki kończące się każdą cyfrą ze zbioru* $\{0, 1, 2, \dots, 9\}$. Odp. 270, *dzielniki:* $10, 1, 2, 3, 54, 5, 6, 27, 18, 9$. ([UsaT] 2000/2001).

1.7.15. *Dla każdej liczby naturalnej* k *istnieje liczba naturalna podzielna przez* k*, mniejsza lub równa* k^4 *i mająca w swoim zapisie dziesiętnym tylko cyfry* $1, 9, 8, 0$. ([S-kg] 78).

1.7.16. *Każda liczba naturalna* k *ma wielokrotność, która jest mniejsza od* k^4 *i w której zapisie dziesiętnym występują tylko co najwyżej cztery różne cyfry.* ([OM] Niemcy 1995).

D. Niech n będzie taką liczbą naturalną, że $2^{n-1} \leqslant k < 2^n$. Jeśli $n \leqslant 6$, to twierdzenie jest oczywiste. Dalej zakładamy, że $n > 6$.

Niech S będzie zbiorem wszystkich co najwyżej n-cyfrowych liczb naturalnych zbudowanych tylko z zer i jedynek. Takich liczb jest 2^n. Mamy więc $|S| > k$, a zatem istnieją dwie liczby $a, b \in S$ takie, że $a < b$ oraz $a \equiv b \pmod{k}$. Zapis dziesiętny liczby $b - a$ ma tylko cyfry $0, 1, 8, 9$. Ponadto,

$$b - a \leqslant b \leqslant \sum_{i=0}^{n-1} 10^i < 10^n < 16^{n-1} = (2^{n-1})^4 \leqslant k^4.$$

Liczba $b - a$ spełnia więc żądane warunki. ⊠

1.7.17. *S jest zbiorem wszystkich liczb naturalnych o zero-jedynkowych cyfrach mających co najwyżej* 1988 *jedynek. Wykazać, że istnieje taka liczba naturalna, która nie dzieli żadnej liczby zbioru* S. ([TTsa] 1988).

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

1.8 Cyfry w zapisie dwójkowym

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

1.8.1. *Niech* $d(n)$ *oznacza liczbę jedynek występujących w zapisie dwójkowym liczby naturalnej* n. *Zachodzą wtedy następujące równości.*

(1) $\sum_{k=0}^{2^n-1} (-1)^{d(k)} k^n = (-1)^n 2^{n(n-1)/2} n!$.

(2) $\sum_{k=0}^{2^n-1} (-1)^{d(k)} x^k = (1 - x)\left(1 - x^2\right)\left(1 - x^4\right) \cdots \left(1 - x^{2^{n-1}}\right)$. ([Putn] 1984).

1.8.2. *Oznaczmy przez* $d(n)$ *liczbę jedynek w zapisie dwójkowym liczby naturalnej* n. *Liczby postaci* $d(n)$ *posiadają następujące własności.*

(1) $d(n^2) \leqslant \frac{1}{2} d(n)(d(n) + 1)$, *dla* $n \in \mathbb{N}$.

(2) *Istnieje nieskończenie wiele liczb naturalnych* n *takich, że* $d(n^2) = \frac{1}{2} d(n)(d(n) + 1)$. *Takimi liczbami* n *są na przykład wszystkie potęgi dwójki.*

(3) *Istnieje ciąg* (a_n) *liczb naturalnych taki, że* $\lim_{n\to\infty} \frac{d(a_n^2)}{d(a_n)} = 0$.

(4) *Istnieje ciąg* (a_n) *liczb naturalnych taki, że* $\lim_{n\to\infty} \frac{d(a_n^2)}{d(a_n)} = \infty$. *Takim ciągiem jest na przykład* $a_n = \sum_{i=1}^{n} a^{2^i}$.

(5) *Dla każdej nieujemnej liczby rzeczywistej* γ *istnieje ciąg* (a_n) *liczb naturalnych taki, że* $\lim_{n\to\infty} \frac{d(a_n^2)}{d(a_n)} = \gamma$. ([IMO] Shortlist 1992, [Djmp] 271(564)).

1.8.3. *Ile jest liczb naturalnych n takich, że $4 \leqslant n \leqslant 1023$, których zapis dwójkowy nie posiada trzech kolejnych jedynek?* Odp. 228. ([OM] Bułgaria 1999).

1.8.4. *Istnieje wielokrotność liczby 2004, której zapis w dwójkowym systemie numeracji ma dokładnie 2004 zera i 2004 jedynki.* ([OM] W.Brytania 2004).

1.8.5. *Jeśli liczba jedynek w zapisie dwójkowym liczby $n \geqslant 0$ jest parzysta, to pisać będziemy $a_n = 0$. W przeciwnym przypadku pisać będziemy $a_n = 1$. Mamy więc ciąg $(a_0, a_1, a_2, \dots)$, którego początkowymi wyrazami są $0, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 1$.*

(1) *Pokazać, że istnieje co najmniej 320 par (a_n, a_{n+1}) takich, że $n < 1000$ i $a_n = a_{n+1}$.*

(2) *Pokazać, że istnieje co najmniej 450 000 par (a_n, a_{n+7}) takich, że $n < 10^6 - 6$ i $a_n = a_{n+7}$.* ([TTss] 1999).

★ A. Wachułka, *Dwójkowy układ liczbowy Jana Brożka*, [Mat] 6/1972 358.

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

1.9 Sumy liczb n-cyfrowych

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

1.9.1. *Niech $A = \{a_1, \dots, a_p\}$ będzie podzbiorem zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ i niech $n \in \mathbb{N}$. Suma wszystkich n-cyfrowych liczb naturalnych, utworzonych z cyfr należących do zbioru A, jest równa*

$$p^{n-1} s \tfrac{10^n - 1}{9} = p^{n-1} s \cdot \underbrace{11\dots1}_{n},$$

gdzie $s = a_1 + a_2 + \dots + a_p$.

D. Oznaczmy rozważaną sumę przez T_n. Jest oczywiste, że $T_1 = s = p^0 s \frac{10^1 - 1}{9}$. Niech $n \geqslant 1$ i załóżmy, że liczbę T_n już znamy. Wśród $(n+1)$-cyfrowych liczb, o cyfrach ze zbioru A, jest dokładnie p^n takich liczb, których pierwszą cyfrą jest a_1. Mamy tu również dokładnie p^n takich liczb, których pierwszą cyfrą jest a_2. Tak samo jest, gdy pierwszą cyfrą jest każde a_i, dla $i = 1, 2, \dots, p$. Zatem

$$\begin{aligned} T_{n+1} &= (p^n a_1 10^n + T_n) + (p^n a_2 10^n + T_n) + \dots + (p^n a_p 10^n + T_n) \\ &= p^n (a_1 + a_2 + \dots + a_p) 10^n + pT_n \\ &= p^n s 10^n + pT_n. \end{aligned}$$

Zatem $T_1 = s$ oraz $T_{n+1} = p^n s 10^n + pT_n$ dla $n \geqslant 1$. Załóżmy, że $T_n = p^{n-1} s e_n$, gdzie $e_n = \frac{10^n - 1}{9} = 1 + 10 + 10^2 + \dots + 10^{n-1}$. Wtedy

$$T_{n+1} = p^n s 10^n + pT_n = p^n s 10^n + p \cdot p^{n-1} s e_n = p^n s \left(10^n + 10^{n-1} + \dots + 1\right) = p^n s e_{n+1}.$$

Teza wynika więc na mocy indukcji. ⊠

W powyższych sumach rozważaliśmy n-cyfrowe liczby naturalne zapisane w systemie dziesiętnym. Zastępując w powyższym dowodzie liczbę 10 na dowolną podstawą numeracji $q \geqslant 2$, otrzymujemy:

1.9.2. *Niech $q \geqslant 2$. Niech $A = \{a_1, \dots, a_p\}$ będzie podzbiorem zbioru $\{1, 2, \dots, q-1\}$ i niech $n \in \mathbb{N}$. Suma wszystkich n-cyfrowych liczb w systemie numeracji o podstawie q, utworzonych z cyfr należących do zbioru A, jest równa*

$$p^{n-1} s \tfrac{q^n-1}{q-1} = p^{n-1} s \left(1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1}\right),$$

gdzie $s = a_1 + a_2 + \dots + a_p$.

Zanotujmy kilka szczególnych przypadków faktu 1.9.1.

1.9.3. *Suma wszystkich n-cyfrowych liczb naturalnych o nieparzystych cyfrach jest równa*

$$a_n = 5^{n+1} \cdot \tfrac{10^n-1}{9}.$$

Przykłady: $a_1 = 25$, $a_2 = 1375$, $a_3 = 69375$, $a_4 = 3471875$, $a_5 = 173609375$, $a_6 = 8680546875$. ([Crux] 2002 s.143).

D. Niech $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$. Wtedy $p = |A| = 5$ oraz $s = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25$. Na mocy 1.9.1 rozważana suma jest równa $p^{n-1} s e_n = 5^{n-1} \cdot 25 \cdot \frac{10^n-1}{9} = 5^{n+1} \cdot \frac{10^n-1}{9}$. ⊠

1.9.4. *Suma wszystkich n-cyfrowych liczb naturalnych utworzonych z cyfr należących do zbioru $\{2, 4, 6, 8\}$ jest równa*

$$b_n = 5 \cdot 4^n \cdot \tfrac{10^n-1}{9}.$$

Przykłady: $b_1 = 20$, $b_2 = 880$, $b_3 = 35520$, $b_4 = 1422080$, $b_5 = 56888320$, $b_6 = 2275553280$.

D. Niech $A = \{2, 4, 6, 8\}$. Wtedy $p = |A| = 4$ oraz $s = 2+4+6+8 = 20$. Na mocy 1.9.1 rozważana suma jest równa $p^{n-1} s e_n = 4^{n-1} \cdot 20 \cdot \frac{10^n-1}{9} = 5 \cdot 4^n \cdot \frac{10^n-1}{9}$. ⊠

1.9.5. *Suma wszystkich n-cyfrowych liczb bezzerowych jest równa*

$$c_n = 5 \cdot 9^{n-1} \left(10^n - 1\right).$$

Przykłady: $c_1 = 45$, $c_2 = 4455$, $c_3 = 404595$, $c_4 = 36446355$, $c_5 = 3280467195$, $c_6 = 295244704755$.

D. Niech $A = \{1, 2, \dots, 9\}$. Wtedy $p = |A| = 9$ oraz $s = 1 + 2 + \dots + 9 = 45$. Na mocy 1.9.1 rozważana suma jest równa $p^{n-1} s e_n = 9^{n-1} \cdot 45 \cdot \frac{10^n-1}{9} = 5 \cdot 9^{n-1} \left(10^n - 1\right)$. ⊠

W powyższych przypadkach wszystkie n-cyfrowe liczby naturalne nie posiadały żadnej zerowej cyfry. Teraz nie będziemy tego zakładać.

1.9.6. *Niech $A = \{a_1, \dots, a_p\}$ będzie podzbiorem zbioru $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ zawierającym 0 i niech $n \in \mathbb{N}$. Suma wszystkich n-cyfrowych liczb naturalnych, utworzonych z cyfr należących do zbioru A, jest równa s gdy $n = 1$ i jest równa*

$$p^{n-2} s \left(p \tfrac{10^n-1}{9} - \tfrac{10^{n-1}-1}{9}\right)$$

gdy $n \geqslant 2$, gdzie $s = a_1 + a_2 + \dots + a_p$.

1.9.7. *Niech $q \geqslant 2$. Niech $A = \{a_1, \dots, a_p\}$ będzie podzbiorem zbioru $\{0, 1, 2, \dots, q-1\}$ zawierającym 0 i niech $n \in \mathbb{N}$. Suma wszystkich n-cyfrowych liczb w systemie numeracji o podstawie q, utworzonych z cyfr należących do zbioru A, jest równa s gdy $n = 1$ i jest równa*

$$p^{n-2}s\left(p\tfrac{q^n-1}{q-1} - \tfrac{q^{n-1}-1}{q-1}\right)$$

gdy $n \geqslant 2$, gdzie $s = a_1 + a_2 + \cdots + a_p$.

Zanotujmy kilka szczególnych przypadków faktu 1.9.6.

1.9.8. *Suma wszystkich n-cyfrowych liczb naturalnych zero-jedynkowych jest równa*

$$a_n = 2^{n-2} \cdot \tfrac{19 \cdot 10^{n-1}-1}{9}.$$

Przykłady: $a_1 = 1$, $a_2 = 21$, $a_3 = 422$, $a_4 = 8444$, $a_5 = 168888$, $a_6 = 3377776$.

D. Dla $n = 1$ jest to oczywiste. Niech $n \geqslant 2$. Niech $A = \{0, 1\}$. Wtedy $p = |A| = 2$ oraz $s = 0+1 = 1$. Na mocy 1.9.6 rozważana suma jest równa $p^{n-2}s\left(p\frac{10^n-1}{9} - \frac{10^{n-1}-1}{9}\right) = 2^{n-2}\left(2\frac{10^n-1}{9} - \frac{10^{n-1}-1}{9}\right) = \frac{2^{n-2}}{9}\left(10^{n-1}(2 \cdot 10 - 1) - 1\right) = 2^{n-2} \cdot \frac{19 \cdot 10^{n-1}-1}{9}$. ⊠

1.9.9. *Suma wszystkich n-cyfrowych liczb naturalnych o parzystych cyfrach jest równa*

$$b_n = 4 \cdot 5^{n-1}\left(5 \cdot \tfrac{10^n-1}{9} - \tfrac{10^{n-1}-1}{9}\right).$$

Przykłady: $b_1 = 20$, $b_2 = 1080$, $b_3 = 54400$, $b_4 = 2722000$, $b_5 = 136110000$, $b_6 = 6805550000$.

D. Dla $n = 1$ jest to oczywiste. Niech $n \geqslant 2$ i niech $A = \{0, 2, 4, 6, 8\}$. Wtedy $p = |A| = 5$ oraz $s = 0 + 2 + 4 + 6 + 8 = 20$. Na mocy 1.9.6 rozważana suma jest równa $p^{n-2}s\left(p\frac{10^n-1}{9} - \frac{10^{n-1}-1}{9}\right) = 5^{n-2}20\left(5\frac{10^n-1}{9} - \frac{10^{n-1}-1}{9}\right) = 4 \cdot 5^{n-1}\left(5\frac{10^n-1}{9} - \frac{10^{n-1}-1}{9}\right)$. ⊠

1.9.10. *Suma wszystkich n-cyfrowych liczb naturalnych jest równa*

$$c_n = 5 \cdot 10^{n-2}\left(10^{n+1} - 10^{n-1} - 9\right).$$

Przykłady: $c_1 = 45$, $c_2 = 4905$, $c_3 = 494550$, $c_4 = 49495500$, $c_5 = 4949955000$, $c_6 = 494999550000$.

D. Dla $n = 1$ jest to oczywiste. Niech $n \geqslant 2$ i niech $A = \{0, 1, 2, 3, \dots, 9\}$. Wtedy $p = |A| = 10$ oraz $s = 0+1+2+\cdots+9 = 45$. Na mocy 1.9.6 rozważana suma jest równa $p^{n-2}s\left(p\frac{q^n-1}{q-1} - \frac{q^{n-1}-1}{q-1}\right) = 10^{n-2}45\left(10\frac{10^n-1}{9} - \frac{10^{n-1}-1}{9}\right) = 5 \cdot 10^{n-2}\left(10^{n+1} - 10^{n-1} - 9\right)$. ⊠

---

ooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

1.10 Różne zadania o cyfrach

ooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

1.10.1. *Ile liczb naturalnych mniejszych od* 10^n *ma zapis dziesiętny, którego cyfry tworzą ciąg niemalejący?* Odp. $\binom{n+9}{9} - 1$. ([Br80] 104).

1.10.2. *Ile jest liczb* n*-cyfrowych o niemalejących cyfrach ?* Odp. $\binom{n+8}{n}$. ([Miss] 1995 z.84).

1.10.3. *Mówić będziemy, że liczba naturalna* n *jest* brazylijska*, jeśli istnieje liczba naturalna* q *taka, że* $1 < q < n-1$ *i* n *w systemie numeracji o podstawie* q *ma wszystkie cyfry jednakowe. Na przykład, liczby* 62 *i* 15 *są brazylijskie gdyż* $62 = 222_5$, $15 = 33_4$. *Wykazać, że liczba* 1993 *nie jest brazylijska, natomiast* 1994 *jest.* ([Ibe] 1994).

1.10.4. *Ciąg* (a_n) *zdefiniowany jest następująco:*

$$\begin{cases} a_0 &= 9 \\ a_{k+1} &= 3a_k^4 + 4a_k^3 \qquad \text{dla } k \geqslant 0. \end{cases}$$

Wykazać, że liczba a_{10} *ma w swoim zapisie dziesiętnym co najmniej* 1000 *dziewiątek.* ([Kw] 8/1992 31).

1.10.5. *Niech* $a_1 = 2$, $a_2 = 4$, $a_3 = 8$ *i niech* a_{n+3}, *dla* $n \in \mathbb{N}$, *będzie ostatnią cyfrą liczby* $a_n + a_{n+1} + a_{n+2}$. *Czy w ciągu* $a_1, a_2, a_3, \dots$ *występuje blok* $2, 0, 0, 2$*?* Odp. *Występuje i to nieskończenie wiele razy.* ([Uiuc] 2002).

1.10.6. *Jeśli* n *jest liczbą naturalną, to jedna z cyfr* $1, 2$ *lub* 9 *występuje w zapisach dziesiętnych liczb* n *lub* $3n$. ([TT], [MC] 18(2)(2005) s.22).

D. Niech $a(n)$ oznacza początkową cyfrę liczby n. Jeśli $a(n) = 1, 2$ lub 9, to nie ma czego dowodzić. Jeśli $a(n) = 3$, to $a(3n) = 1$ lub 9. Jeśli $a(n) = 4$ lub 5, to $a(3n) = 1$. Gdy $a(n) = 6$, to $a(3n) = 1$ lub 2. Gdy $a(n) = 7$ lub 8, to $a(3n) = 2$. ⊠

1.10.7. *Znaleźć liczbę dziesięciocyfrową, której pierwsza cyfra jest zarazem liczbą zer w jej zapisie dziesiętnym, druga liczbą jedynek, trzecia liczbą dwójek i tak aż do ostatniej cyfry, która jest liczbą dziewiątek.* Odp. 6210001000. ([Dlt] 11/1986 13).

1.10.8. *Mówić będziemy, że liczba naturalna* n *jest* naprzemienna*, jeśli każde dwie kolejne jej cyfry rozwinięcia dziesiętnego są różnej parzystości.*

(1) *Dla każdej liczby naturalnej* n *istnieje naprzemienna* $(2n)$*-cyfrowa liczba podzielna przez* 2^{2n+1}.

(2) *Dla każdej liczby naturalnej* $n \geqslant 2$ *istnieje naprzemienna* n*-cyfrowa liczba podzielna przez* $2 \cdot 5^n$.

(3) *Dla danej liczby naturalnej* n *następujące dwa warunki są równoważne.*

(*a*) $20 \nmid n$.

(*b*) *Istnieje liczba naturalna* m *taka, że liczba* nm *jest naprzemienna.*

([IMO] 2005, [SPom]).

1.10.9. *Jeśli m jest liczbą naturalną, to przez $L(m)$ oznaczamy liczbę wszystkich jej cyfr większych od 4. Zachodzi równość:*

$$\frac{1}{10^n}\sum_{i=0}^{10^n-1} L(i)^4 = \frac{1}{16}n(n+1)(n^2+5n-2),$$

dla $n \in \mathbb{N}$. ([Miss](3)(1991) z.39).

1.10.10. *Na tablicy wypisano kilka zer, jedynek i dwójek. Wybieramy dwie różne liczby a i b i zamiast nich wpisujemy liczbę $c \in \{0,1,2\}$ różną od a i b. Powtarzamy to kilka razy. Wykazać, że jeśli na tablicy zostanie jedna liczba, to nie zależy ona od kolejności wybierania.* ([WaJ] 214(75)).

★ Grzegorz Bartczak, *Własności cyfr pewnych ciągów o wyrazach naturalnych*, [Pmgr] 1997.
H. A. Hurewicz, *Ciągi bez powtórzeń* (po rosyjsku), [Kw] 9/1975 7-11.
A. Lada, *Liczby naturalne o szczególnym rozmieszczeniu cyfr*, [Pmgr] 2009.
E. H. Nikołajew, *Czy wszystkie cyfry są równouprawnione?*, [Kw] 11/1975 16-20.

2 Przestawianie cyfr

2.1 Odwracanie porządku cyfr

Jeśli n jest liczbą naturalną, to przez n' oznaczamy liczbę naturalną, którą otrzymujemy odwracając porządek cyfr liczby n. Mówić będziemy, że n' jest *lustrzanym odbiciem* liczby n. Przykłady: $(12345)' = 54321$, $(4453377)' = 7733544$.

2.1.1. *Równanie* $n = 3n'$ *nie ma rozwiązań.* ([OM] St Petersburg 2002).

2.1.2. *Jeśli* n'/n *jest liczbą całkowitą, to* $n'/n = 1$ *lub* 4 *lub* 9.
([IMO] Longlist 1977, [Djmp] s.418, [ShCY] 24).

2.1.3. *Znaleźć liczbę naturalną* n *taką, że* $n' = 4n$. ([ShCY] 24).

O. Najmniejszą taką liczbą jest 2178. Liczba naturalna spełnia sformułowany w zadaniu warunek wtedy i tylko wtedy, gdy jest liczbą postaci np.:

$$21\,99\,78\ 000\ 2178\ 0\ 21\,9\,78\ 0\ 2178\ 000\ 21\,99\,78,$$

tzn. składa się z dowolnej liczby grup 2178, przy czym:

1. pomiędzy zespoły cyfr 21 i 78 może być dopisana dowolna, byleby jednakowa (licząc od początku liczby i od jej końca), liczba dziewiątek;

2. pomiędzy zespoły cyfr 2178 z dopisanymi dziewiątkami może być dopisana dowolna, byleby jednakowa (licząc od początku liczby i od jej końca), liczba zer. (Porównaj 2.1.5). ⊠

2.1.4. *Znaleźć liczbę naturalną* n *taką, że* $n' = 9n$.
([IMO] Longlist 1977, [Djmp] s.117(418), [ShCY] 24).

D. Takimi liczbami są na przykład: $1089, 10989, 109989, 1099989, \cdots$. ⊠

2.1.5. *Opisać wszystkie liczby naturalne* n *takie, że* $10 \nmid n$, $n' \mid n$, $n/n' > 1$. ([DyM] 163).

U. Własność taką mają wszystkie liczby występujące w ciągach:

$$8712,\ 87912,\ 879912,\ 8799912,\ \cdots;\quad 9801,\ 98901,\ 989901,\ 9899901,\ \cdots.$$

Ponadto liczby 8791200871287120087912, 98999010000980100009899901. Patrz 2.1.3. ⊠

2.1.6. $9 \mid n - n'$. ([Mat] 4/1949 48).

D. Oznaczmy przez $s(a)$ sumę wszystkich cyfr liczby naturalnej a. Dobrze wiadomo, że dla każdej liczby naturalnej a zachodzi kongruencja $a \equiv s(a) \pmod 9$. Ponieważ $s(n) = s(n')$, więc: $n - n' \equiv s(n) - s(n') = 0 \pmod 9$, czyli $9 \mid n - n'$. ⊠

2.1.7. $11 \mid n \iff 11 \mid n'$.

D. Jeśli $a = \overline{a_k a_{k-1} \cdots a_2 a_1 a_0}$ jest liczbą naturalną, to przez $m(a)$ oznaczmy *naprzemienną sumę cyfr* liczby a, to znaczy, $m(a) = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \cdots$. Dobrze wiadomo, że dla każdej liczby naturalnej a zachodzi kongruencja $a \equiv m(a) \pmod{11}$. Jest ponadto oczywiste, że $m(n') = \pm m(n)$. Mamy zatem: $11 \mid n \iff 11 \mid m(n) \iff 11 \mid m(n') \iff 11 \mid n'$. ⊠

2.1.8. *Jeśli n ma nieparzystą liczbę cyfr, to* $11 \mid n+n' \iff 11 \mid n$. ([KoM] 2001. Wynika z 2.1.7).

2.1.9. *Jeśli n ma nieparzystą liczbę cyfr, to* $99 \mid n - n'$. (Wynika z 2.1.6 i dowodu 2.1.7).

2.1.10. *Naturalna liczba a ma taką własność:* $\forall_{n\in\mathbb{N}}\ a \mid n \Longrightarrow a \mid n'$. *Wykazać, że* $a \mid 99$. ([WaJ] z.93, [Ko02] s.71).

D. Sposób I ([WaJ] s.139). Jeśli m i a są liczbami naturalnymi, to istnieje liczba naturalna s taka, że początkowe cyfry liczby $s \cdot a$ tworzą liczbę m (patrz 6.4.1 lub 6.4.2).

Niech a będzie liczbą naturalną spełniającą podane w tezie warunki. Z powyższego faktu wynika, że istnieje liczba naturalna n podzielna przez a, której pierwszą cyfrą jest 1. Wówczas ostatnią cyfrą liczby n' jest 1 i a dzieli n'. Oznacza to, że liczba a jest względnie pierwsza z 10.

Rozważmy teraz liczbę naturalną u podzielną przez a i rozpoczynającą się cyframi $5, 0, 0$ (taka liczba u istnieje na mocy wspomnianego wyżej faktu). Zapiszmy u symbolicznie w postaci $u = 500u_1u_2\dots u_m$. Wtedy liczba $u' = u_mu_{m-1}\dots u_2u_1005$ jest podzielna przez a. Dopiszmy $m+2$ zera z prawej strony liczby u'. Otrzymana nowa liczba jest też oczywiście podzielna przez a. Dodajmy do niej liczbę u. Otrzymamy wtedy liczbę $v = u_mu_{m-1}\dots u_2u_101000u_1u_2\dots u_m$, podzielną przez a. Przez a dzieli się zatem również liczba $v' = u_mu_{m-1}\dots u_2u_100010u_1u_2\dots u_m$ oraz liczba $v - v' = 9900\dots 00$. Ale $\mathrm{nwd}(a, 10) = 1$, więc $a \mid 99$.

Sposób II ([Ko02] s.71). Najpierw stwierdzamy, że rozpatrywana liczba a jest względnie pierwsza z 10. Do tego celu wystarczy wykorzystać znany fakt, że dla dowolnej liczby naturalnej m istnieje liczba naturalna podzielna przez m i mająca w swoim zapisie dziesiętnym tylko jedynki i zera.

Jeśli już wiemy, że $\mathrm{nwd}(a, 10) = 1$, to wiemy (znany fakt), że istnieje liczba u postaci 11..11 podzielna przez a. Załóżmy, że tych jedynek jest k. Niech $v = 23 \cdot u$. Wtedy $v = 322\dots 2219$ i $v' = 9122\dots 223$ (jest tutaj $(k-2)$ dwójek). Niech $w = v' - 2u$. Wtedy $w = 8900\dots 001$, $w' = 100\dots 0098$ oraz $w' - 9u = 99$. Wszystkie rozpatrywane liczby są podzielne przez a. W szczególności, $a \mid 99$. ⊠

2.1.11. *Jeśli $m \in \mathbb{N}$, to oznaczmy przez $a(m)$ moc zbioru wszystkich liczb całkowitych postaci $n - n'$, gdzie n jest m-cyfrową liczbą naturalną. Wykazać, że*

$$a(m) = \begin{cases} 1, & \text{gdy } m = 1; \\ 18 \cdot 19^{\frac{m-2}{2}}, & \text{gdy } m \text{ jest liczbą parzystą}; \\ 18 \cdot 19^{\frac{m-3}{2}}, & \text{gdy } m \text{ jest liczbą nieparzystą } > 1. \end{cases}$$

([Kw] 1/1988 26).

2.1.12. *Jeśli liczba n ma 17 cyfr, to liczba $n + n'$ ma co najmniej jedną cyfrę parzystą.* ([Kw] 7/1971 42).

2.1.13. *Jeśli liczba n ma $4k + 1$ cyfr, to liczba $n + n'$ ma co najmniej jedną cyfrę parzystą.* ([Kw] 7/1971 42).

U. Jeśli liczba cyfr liczby n jest parzysta lub jest postaci $4k + 3$, to liczba $n + n'$ może mieć same cyfry nieparzyste. Przykłady: $21 + 12 = 33$, $726 + 627 = 1353$. ⊠

2.1.14. *Niech $f(n) = (n + 2)'$ dla $n \in \mathbb{N}$. Ciąg* $1,\ f(1),\ ff(1),\ fff(1),\ \dots,$ *czyli ciąg*

$$1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 11,\ 31,\ 33,\ 53,\ \dots$$

jest okresowy, o czystym 81-wyrazowym okresie. ([S59] 289).

2.1.15. *Niech* $f(n) = (n+2)'$ *dla* $n \in \mathbb{N}$. *Wtedy dla dowolnej liczby naturalnej* $n \leqslant 100$ *ciąg*

$$n,\ f(n),\ ff(n),\ fff(n),\ \dots$$

jest okresowy, o okresie czystym lub mieszanym, mającym 81 *wyrazów* (*i będącym permutacją cykliczną okresu dla* $n = 1$). ([S59b]).

2.1.16. *Niech* $g(n) = (n+5)'$ *dla* $n \in \mathbb{N}$. *Wtedy ciąg*

$$1,\ g(1),\ gg(1),\ ggg(1),\ \dots \quad \textit{czyli ciąg} \quad 1, 6, 11, 61, 66, 17, 22, 72, \dots$$

jest okresowy, o czystym 207*-wyrazowym okresie.* ([S59] 289).

2.1.17. *Niech* $h(n) = (n+10)'$ *dla* $n \in \mathbb{N}$. *Wtedy ciąg*

$$1,\ h(1),\ hh(1),\ hhh(1),\ \dots \quad \textit{czyli ciąg} \quad 1, 11, 12, 22, 23, \dots$$

nie jest okresowy. Natomiast ciąg $n,\ h(n),\ hh(n),\ hhh(n),\ \dots$ *dla* $n = 1011$ *jest okresowy i jego okres ma* 18 *wyrazów.* ([S59] 289).

2.1.18. *Rozpatrzmy ciąg* (x_n) *liczb naturalnych, zdefiniowany wzorami:*

$$x_1 = a, \quad x_{n+1} = x_n' + b,$$

gdzie a, b *są danymi liczbami naturalnymi. Jeśli liczba* b *jest potęgą liczby* 2 *albo liczby* 5, *to ciąg* (x_n) *jest okresowy.* (B. Rokowska 1959,).

2.1.19. *W dowolnym systemie numeracji o podstawie* $q \geqslant 3$ *istnieje jedyna trzycyfrowa liczba* $\overline{abc}$, *której przedstawienie w systemie numeracji o podstawie* $h = q \pm 1$ *jest równe* $\overline{cba}$. ([OM] Austria 2003).

2.1.20. *Niech* $n \in \mathbb{N}$. *Liczby* $n^2(n^2+2)^2$ *i* $n^4(n^2+2)^2$ *w swym zapisie przy podstawie* n^2+1 *mają te same cyfry, lecz w odwrotnym porządku.* ([OM] Szwecja 1989, [Pa97]).

2.1.21. *Istnieją liczby kwadratowe postaci* $n \cdot n'$. *Przykłady:* $288 \cdot 882 = 504^2$, $528 \cdot 825 = 660^2$, $768 \cdot 867 = 816^2$, $8712 \cdot 2178 = 4356^2$, $98901 \cdot 10989 = 32967^2$. ([Mon] E1243 1(1977), 7(1979)).

2.1.22. *Dla każdej liczby naturalnej* $n \geqslant 3$ *istnieje liczba* n*-cyfrowa* a, *nie będąca kwadratem i różna od* a' *taka, że liczba* $a \cdot a'$ *jest kwadratowa.* ([Ko02]).

D. Jeśli n jest nieparzyste, to każda liczba a postaci

$$a = 2\underbrace{00\dots0}_{s}8\underbrace{00\dots0}_{s}8 = 2\left(10^{s+1}+2\right)^2$$

spełnia żądane warunki. W tym przypadku

$$a' = 8\underbrace{00\dots0}_{s}8\underbrace{00\dots0}_{s}2 = 2\left(2 \cdot 10^{s+1}+1\right)^2$$

i stąd $a \cdot a' = \big(2(10^{s+1}+2)(2 \cdot 10^{s+1}+1)\big)^2$.

Jeśli n jest liczbą parzystą, to warunki zadania spełniają liczby postaci

$$a = 11(10^s+2)^2.$$

W tym przypadku $a' = 11(2 \cdot 10^s + 2)^2$ i stąd $a \cdot a' = (11(10^s+1)(2 \cdot 10^s+1))^2$. ⊠

2.1.23.

63504	=	$252 \cdot 252$	=	$441 \cdot 144$	
101556	=	$651 \cdot 156$	=	$372 \cdot 273$	([Szu87] 33).
144648	=	$492 \cdot 294$	=	$861 \cdot 168$	
185472	=	$483 \cdot 384$	=	$672 \cdot 276$.	(Maple).

2.1.24.

5166504	=	$2412 \cdot 2142$	=	$4221 \cdot 1224$	10509408	=	$4812 \cdot 2184$	=	$8421 \cdot 1248$
5955264	=	$2532 \cdot 2352$	=	$4431 \cdot 1344$	10865686	=	$3782 \cdot 2873$	=	$6851 \cdot 1586$
6794424	=	$2652 \cdot 2562$	=	$4641 \cdot 1464$	11093796	=	$3972 \cdot 2793$	=	$6951 \cdot 1596$
7683984	=	$2772 \cdot 2772$	=	$4851 \cdot 1584$	11768148	=	$4182 \cdot 2814$	=	$8241 \cdot 1428$
7812756	=	$3612 \cdot 2163$	=	$6321 \cdot 1236$	11807208	=	$4932 \cdot 2394$	=	$8631 \cdot 1368$
8262306	=	$3162 \cdot 2613$	=	$6231 \cdot 1326$	12494209	=	$3913 \cdot 3193$	=	$9331 \cdot 1339$
8856036	=	$3732 \cdot 2373$	=	$6531 \cdot 1356$	13564768	=	$4592 \cdot 2954$	=	$8651 \cdot 1568$
9523696	=	$3472 \cdot 2743$	=	$6541 \cdot 1456$	14201712	=	$4053 \cdot 3504$	=	$6132 \cdot 2316$.
9949716	=	$3852 \cdot 2583$	=	$6741 \cdot 1476$	(Maple).				

2.1.25.

15089472	=	$4623 \cdot 3264$	=	$6432 \cdot 2346$	22818208	=	$6923 \cdot 3296$	=	$9632 \cdot 2369$
15449112	=	$4263 \cdot 3624$	=	$6342 \cdot 2436$	24706318	=	$6293 \cdot 3926$	=	$9362 \cdot 2639$
16746912	=	$4473 \cdot 3744$	=	$6552 \cdot 2556$	29116584	=	$6174 \cdot 4716$	=	$8253 \cdot 3528$
17393152	=	$4853 \cdot 3584$	=	$6752 \cdot 2576$	29973924	=	$6834 \cdot 4386$	=	$8643 \cdot 3468$
18095112	=	$4683 \cdot 3864$	=	$6762 \cdot 2676$	30873024	=	$6384 \cdot 4836$	=	$8463 \cdot 3648$
19164096	=	$4704 \cdot 4074$	=	$8232 \cdot 2328$	32679864	=	$6594 \cdot 4956$	=	$8673 \cdot 3768$
19493712	=	$4893 \cdot 3984$	=	$6972 \cdot 2796$	41478016	=	$6716 \cdot 6176$	=	$9344 \cdot 4439$
20666016	=	$4824 \cdot 4284$	=	$8442 \cdot 2448$	45121216	=	$6946 \cdot 6496$	=	$9664 \cdot 4669$.
22218336	=	$4944 \cdot 4494$	=	$8652 \cdot 2568$	(Maple).				

★ J. Browkin, *O okresowości pewnych ciągów liczb naturalnych*, [Wm] 2(1959) 273-276.
B. Rokowska, *O okresowych ciągach liczb naturalnych*, [Wm] 3(1959) 41-43.
A. Schinzel, *O okresowości pewnych ciągów liczb naturalnych*, [Wm] 2(1959) 269-272.

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

2.2 Liczby palindromiczne

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

Mówimy, że liczba naturalna n jest *palindromiczna*, jeśli pokrywa się z liczbą, mającą cyfry liczby n zapisane w odwrotnej kolejności. Innymi słowy, liczbą palindromiczną nazywamy taką liczbę naturalną, której zapis dziesiętny czytany od strony lewej do prawej jest taki sam, jak czytany od strony prawej do lewej. Palindromicznymi są na przykład liczby: 9, 11, 171, 12321, 341143. W poprzednim podrozdziale przez n' oznaczaliśmy lustrzane odbicie liczby n, czyli liczbę powstałą z cyfr liczby naturalnej n zapisanych w odwrotnej kolejności. Liczba naturalna n jest wieęc palindromiczna wtedy i tylko wtedy, gdy $n' = n$.

Wszystkie jednocyfrowe liczby naturalne są oczywiście palindromiczne. Dwucyfrowymi liczbami palindromicznymi są: 11, 22, 33, ..., 99. Wstawiając w środku każdej z tych liczb dowolną cyfrę otrzymamy wszystkie trzycyfrowe liczby palindromiczne. Jest ich 90. Palindromicznych liczb czterocyfrowych jest również 90:

$$1001,\ 1111,\ 1221,\ 1331,\ \dots,\ 9779,\ 9889,\ 9999.$$

Wstawiając w środku każdej z tych liczb dowolną cyfrę otrzymamy wszystkie pięciocyfrowe liczby palindromiczne. Jest ich dokładnie 900. Palindromicznych liczb sześciocyfrowych jest również 900. W ten sposób dochodzimy do następujących dwóch stwierdzeń.

2.2.1. *Oznaczmy przez $w(s)$ liczbę wszystkich s-cyfrowych liczb palindromicznych. Mamy wtedy: $w(1) = 9$, $w(2) = 9$, $w(3) = 90$, $w(4) = 90$, $w(5) = 900$, $w(6) = 900$. Dla każdej liczby naturalnej n zachodzą równości:*

$$w(2n-1) = w(2n) = 9 \cdot 10^{n-1}.$$

2.2.2. *Niech $v(s)$ będzie liczbą wszystkich liczb palindromicznych mniejszych od 10^s. Mamy wtedy: $v(1) = 9$, $v(2) = 18$, $v(3) = 108$, $v(4) = 198$, $v(5) = 1098$, $v(6) = 1998$. Dla każdej liczby naturalnej n zachodzą równości:*

$$v(2n-1) = 11 \cdot 10^{n-1} - 2, \quad v(2n) = 2 \cdot (10^n - 1)\,.$$

Ze znanej cechy podzielności przez 11 otrzymujemy następne proste stwierdzenie.

2.2.3. *Każda palindromiczna liczba mająca parzystą liczbę cyfr jest podzielna przez 11.*

Niech (x_n) będzie nieskończonym ciągiem rosnącym, którego wyrazami są wszystkie kolejne liczby palindromiczne. Zanotujmy początkowe wyrazy tego ciągu:

$$x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ \dots,\ x_9 = 9,\ x_{10} = 11,\ x_{11} = 22,\ \dots,\ x_{18} = 99,\ x_{19} = 101,\ x_{20} = 111,\ \cdots.$$

Spójrzmy na pewne wyrazy:

$$\begin{array}{lcrlcrlcr}
x_{10} & = & 11, & x_{100} & = & 919, & x_{1000} & = & 90109,\\
x_{20} & = & 111, & x_{200} & = & 10101, & x_{2000} & = & 1001001,\\
x_{50} & = & 414, & x_{500} & = & 40104, & x_{5000} & = & 4001004,\\
x_{90} & = & 818, & x_{900} & = & 80108, & x_{9000} & = & 8001008,\\
x_{99} & = & 909, & x_{999} & = & 90009, & x_{9999} & = & 9000009.
\end{array}$$

Zbadajmy różnice pomiędzy kolejnymi wyrazami tego ciągu. Bez trudu wykazujemy następujące cztery stwierdzenia.

2.2.4. *Jeśli wszystkie cyfry liczby palindromicznej x_n są dziewiątkami i tych dziwiątek jest $s \geqslant 1$, to następna liczba palindromiczna x_{n+1} jest postaci $100\dots01$ ($s-1$ zer) i wtedy $x_{n+1} - x_n = 2$.*

2.2.5. *Załóżmy, że $x_n = \overline{a_1a_2\dots a_{k-1}a_k\underbrace{99\dots9}_{s}a_ka_{k-1}\dots a_2a_1}$, $s \geqslant 1$, $k \geqslant 1$, $a_k \neq 9$. Wtedy*

$$x_{n+1} = \overline{a_1a_2\dots a_{k-1}b_k\underbrace{00\dots0}_{s}b_ka_{k-1}\dots a_2a_1},$$

gdzie $b_k = a_k + 1$ i w tym przypadku $x_{n+1} - x_n = 11 \cdot 10^{k-1}$.

2.2.6. *Jeśli $x_n = \overline{a_1a_2\dots a_{m-1}a_ma_ma_{m-1}\dots a_2a_1}$ oraz $a_m \neq 9$, to*

$$x_{n+1} = \overline{a_1a_2\dots a_{m-1}b_mb_ma_{m-1}\dots a_2a_1},$$

gdzie $b_m = a_m + 1$ i wtedy $x_{n+1} - x_n = 11 \cdot 10^{m-1}$.

2.2.7. *Jeśli* $x_n = \overline{a_1a_2\dots a_{m-1}a_ma_{m-1}\dots a_2a_1}$ *oraz* $a_m \neq 9$, *to*

$$x_{n+1} = \overline{a_1a_2\dots a_{m-1}b_ma_{m-1}\dots a_2a_1},$$

gdzie $b_m = a_m + 1$ *i wtedy* $x_{n+1} - x_n = 10^{m-1}$.

Powyższe cztery stwierdzenia obejmują wszystkie możliwe przypadki dotyczące różnic pomiędzy kolejnymi liczbami palindromicznymi. Z tych stwierdzeń otrzymujemy następujące trzy oczywiste wnioski.

2.2.8. *Dla każdej liczby naturalnej* m *istnieje takie* n, *że* $x_{n+1} - x_n > m$.

2.2.9. *Jedynymi liczbami pierwszymi postaci* $x_{n+1} - x_n$ *są* 2 *i* 11. ([Ibe] 1993, [Kw] 1997, 463).

2.2.10. *Jedynymi liczbami pierwszymi będącymi dzielnikami liczb postaci* $x_{n+1} - x_n$ *są* $2, 5$ *oraz* 11. ([OM] Polska 1995/1996).

Przykłady sum odwrotności kolejnych liczb palindromicznych:

$$\sum_{n=1}^{1000} \frac{1}{x_n} = 3,364134829\dots, \qquad \sum_{n=1}^{10000} \frac{1}{x_n} = 3,369666435\cdots \qquad \text{(Maple)}.$$

Można udowodnić:

2.2.11. *Szereg* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x_n}$ *jest zbieżny i jego suma jest mniejsza od* 4.

2.2.12. *Istnieją takie liczby naturalne* $n \geqslant 2$, *które nie są sumami dwóch liczb palindromicznych. Najmniejszą z nich jest* 21. *Takimi liczbami są również:* 32, 43, 54, 65, 76, 87, 98, 111, 131, 141, $151, 161, 171, 181, 191, 201, 1031, 1041, \cdots$.

2.2.13. *Każda liczba naturalna* $3 \leqslant n < 10^6$ *jest sumą trzech liczb palindromicznych* (Maple). *Czi istnieje taka liczba naturalna* $n \geqslant 3$, *która nie jest sumą trzech liczb palindromicznych ?*

2.2.14. *Każda liczba naturalna mniejsza od* 919 *jest różnicą dwóch liczb palindromicznych* (Maple). *Udowodnić, że* 919 *nie jest różnicą dwóch liczb palindromicznych. Udowodnić, że liczby:* 1020, 1029, 1031 *oraz* 1038 *również nie są różnicami dwóch liczb palindromicznych.*

2.2.15. *Niech* e_n *oznacza liczbę zbudowaną z* n *jedynek. Znaleźć wszystkie pary* (m, n) *liczb naturalnych takich, że liczba* e_me_n *jest palindromiczna.* ([OM] Brazylia 2005).

2.2.16. *Dla danej liczby naturalnej* n *przez* $f(n)$ *oznaczamy najmniejszą podstawę numeracji, przy której liczba* n *jest palindromiczna.*

(1) $f(n) \leqslant n - 1$, *gdyż liczba* n *przy podstawie* $n - 1$ *ma zapis* 11.

(2) $f(3) = 2$, $f(12) = 5$, $f(21) = 2$, $f(87) = 28$, $f(100) = 3$.

(3) *Istnieją liczby naturalne* n *takie, że* $f(n) = n - 1$. *Przykłady:* $n = 3, 4, 6, 11, 19, 47$.

(4) *Jeśli* $n > 6$ *i* $f(n) = n - 1$, *to* n *jest liczbą pierwszą.*

(5) *Czy liczba* $f(2^n)$ *jest postaci* $2^k - 1$ *? Tak jest dla* $n = 1, 2, \dots, 30$.

(K.Brown, *On general palindromic numbers*).

★ H. Dubner, R. Ondrejka, *A primer on palindromes*, [Jrec] 26(4)(1994) 256-267.
H. Gabai, D. Coogan, *Palindromes and palindromic primes*, [MM] 42(5)(1969) 252-254.
H. Harborth, *On palindromes*, [MM] 46(2)(1973) 96-99.
A. Nowicki, *Symmetric prime numbers less than* 10^9, Matsumoto, Japan, 1993.
R. Rabczuk, *O liczbach palindromicznych*, [Mat] 5/1994 279-281.

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

2.3 Liczby palindromiczne i ciągi arytmetyczne

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

Wykazaliśmy (patrz 1.2.1), że dla każdej liczby naturalnej n, względnie pierwszej z 10, istnieje liczba postaci $11\dots1$ podzielna przez n. Liczby zbudowane z samych jedynek są oczywiście palindromiczne. Mamy zatem następujące stwierdzenie, które wynika również z 1.2.2 lub 1.2.3.

2.3.1. *Jeśli n jest liczbą naturalną względnie pierwszą z* 10*, to istnieje taka liczba naturalna u, że liczba $n \cdot u$ jest palindromiczna.*

Założyliśmy tutaj, że dana liczba n jest względnie pierwsza z 10. Czy to założenie jest potrzebne? Istnieją takie liczby naturalne n, które nie są względnie pierwsze z 10 i które również posiadają rozważaną własność. Takimi liczbami n są na przykład 12, 14, 15, 16, 18, 24, 25. Istotnie:

$$12 \cdot 21 = 252, \quad 14 \cdot 18 = 252, \quad 15 \cdot 35 = 525, \quad 16 \cdot 17 = 272, \quad 18 \cdot 14 = 252,$$
$$24 \cdot 29 = 696, \quad 25 \cdot 21 = 525.$$

Jeśli ostatnią cyfrą liczby n jest zero (tzn. jeśli $10 \mid n$), to oczywiście nie ma takiej liczby u by iloczyn $n \cdot u$ był liczbą palindromiczną. Należy więc założyć, że $10 \nmid n$. Dla potęg dwójki lub piątki mamy następujące dwa stwierdzenia.

2.3.2. *Dla każdej liczby naturalnej s istnieje liczba naturalna u taka, że liczba $u \cdot 2^s$ jest palindromiczna.* ([Kw] 3/2003 s.28).

D. Zapis dziesiętny liczby 2^s ma co najwyżej s cyfr. Zapiszmy cyfry liczby $a = 2^s$ w odwrotnej kolejności i otrzymaną liczbę oznaczmy przez b. Dopiszmy do liczby b (z prawej strony) s zer. Otrzymujemy wtedy liczbę $b10^s$. Wówczas liczba $b10^m + a$ jest palindromiczna i dzieli się przez 2^s. ⊠

2.3.3. *Dla każdej liczby naturalnej s istnieje liczba naturalna u taka, że liczba $u \cdot 5^s$ jest palindromiczna.*

D. Zapis dziesiętny liczby 5^s ma co najwyżej s cyfr. Zapiszmy cyfry liczby $a = 5^s$ w odwrotnej kolejności i otrzymaną liczbę oznaczmy przez b. Dopiszmy do liczby b (z prawej strony) s zer. Otrzymujemy wtedy liczbę $b10^s$. Wówczas liczba $b10^m + a$ jest palindromiczna i dzieli się przez 5^s. ⊠

Udowodnimy teraz, że w stwierdzeniu 2.3.1 wystarczy tylko założyć, że liczba n nie jest podzielna przez 10.

2.3.4. *Jeśli n jest liczbą naturalną niepodzielną przez* 10*, to istnieje taka liczba naturalna u, że liczba $n \cdot u$ jest palindromiczna.*

D. Już wiemy (patrz 2.3.1), że teza zachodzi dla liczb n względnie pierwszych z 10. Niech teraz n będzie taką liczbą naturalną niepodzielną przez 10, dla której $\text{nwd}(n, 10) \geqslant 2$. Zachodzić może jeden z następujące dwóch przypadków.

`Przypadek 1.` Niech $n = 2^s m$, gdzie $s, m \in \mathbb{N}$ oraz $\text{nwd}(m, 10) = 1$. Oznaczmy przez a liczbę 2^s i niech b będzie liczbą powstałą z cyfr liczby a zapisanych w odwrotnej kolejności. Dla każdej nieujemnej liczby całkowitej t rozpatrzmy liczbę

$$M_t = b \cdot 10^{t\varphi(m)+s+1} + \left(\sum_{j=0}^{t} \left(10^{\varphi(m)}\right)^j \right) \cdot 10^s + a.$$

Jest oczywiste, że każda taka liczba M_t (dla dowolnego $t \in \mathbb{N}_0$) jest palindromiczna i podzielna przez 2^s. Wykażemy, że istnieje takie $t \in \mathbb{N}_0$, że liczba M_t jest również podzielna przez m. W tym celu wykorzystamy znane twierdzenie Eulera. Ponieważ $\text{nwd}(m, 10) = 1$, więc na mocy tego twierdzenia liczba $10^{\varphi(m)} - 1$ jest podzielna przez m. Dla każdej więc nieujemnej liczby całkowitej t mamy kongruencję $M_t \equiv b10^{s+1} + 10^s(t + 1) + a \pmod{m}$, czyli kongruencję

$$M_t \equiv 10^s t + c \pmod{m},$$

gdzie $c = b10^{s+1} + 10^s + a$. Ponieważ $\text{nwd}(m, 10) = 1$, więc istnieje taka liczba całkowita v, że $10^s v \equiv 1 \pmod{m}$. Przyjmijmy teraz, że t jest taką nieujemną liczbą całkowitą, która spełnia kongruencję

$$t \equiv -vc \pmod{m}.$$

Takich liczb t mamy oczywiście nieskończenie wiele. Dla każdego takiego t liczba M_t jest podzielna przez m; sprawdźmy:

$$M_t \equiv 10^s t + c \equiv 10^s(-vc) + c = -(10^s v)c + c \equiv -c + c = 0 \pmod{m}.$$

Wiemy również, że liczba M_t jest podzielna przez 2^s oraz $\text{nwd}(2^s, m) = 1$. Dla każdego więc takiego t, palindromiczna liczba M_t jest podzielna przez $2^s m$, czyli jest podzielna przez n. To kończy dowód w przypadku 1.

`Przypadek 2.` Niech $n = 5^s m$, gdzie $s, m \in \mathbb{N}$ oraz $\text{nwd}(m, 10) = 1$. W tym przypadku oznaczmy przez a liczbę 5^s, przez b liczbą powstałą z cyfr liczby 5^s zapisanych w odwrotnej kolejności i przy takich oznaczeniach powtarzamy dokładnie to samo co było w poprzednim przypadku. ⊠

Z przedstawionych dowodów wynika:

2.3.5. *Jeśli n jest liczbą naturalną niepodzielną przez 10, to istnieje nieskończenie wiele takich liczb naturalnych u, dla których liczba $n \cdot u$ jest palindromiczna.*

Dla każdej liczby naturalnej n, niepodzielnej przez 10, oznaczmy przez $u(n)$ najmniejszą taką liczbę naturalną u, że iloczyn $u \cdot n$ jest liczbą palindromiczną. Wykazaliśmy, że takie $u(n)$ zawsze istnieje. Jeśli liczba n jest palindromiczna, to oczywiście $u(n) = 1$.

2.3.6. *Liczby $u(n)$ wraz z iloczynami $u(n)n$ dla $n < 100$.* (Maple).

n	$u(n)$	$u(n) \times n$
12	21	252
13	38	494
14	18	252
15	35	525
16	17	272
17	16	272
18	14	252
19	9	171
21	12	252
23	7	161
24	29	696
25	21	525
26	19	494
27	37	999
28	9	252
29	8	232
31	14	434
32	66	2112
34	8	272
35	15	525
36	7	252
37	3	111
38	13	494
39	15	585

n	$u(n)$	$u(n) \times n$
41	16	656
42	6	252
43	23	989
45	13	585
46	9	414
47	3	141
48	44	2112
49	7	343
51	19	969
52	13	676
53	4	212
54	518	27972
56	11	616
57	3	171
58	4	232
59	13	767
61	442	26962
62	7	434
63	4	252
64	33	2112
65	9	585
67	11	737
68	4	272
69	6	414

n	$u(n)$	$u(n) \times n$
71	845	59995
72	88	6336
73	4	292
74	3	222
75	7	525
76	287	21812
78	11	858
79	6	474
81	12345679	999999999
82	8	656
83	9	747
84	3	252
85	7	595
86	337	28982
87	8	696
89	11	979
91	11	1001
92	9	828
93	55	5115
94	3	282
95	55	5225
96	22	2112
97	55	5335
98	7	686

Zauważmy, że $u(81) = 12345679$ (nie ma ósemki) oraz $u(81) \cdot 81 = 999\,999\,999$.

2.3.7. *Pewne $u(n)$ wraz z iloczynami $u(n)n$ dla $n < 1000$.* (Maple).

n	$u(n)$	$u(n) \times n$
102	201	20502
112	211	13632
169	4	476
225	233	52425
256	33	8448

n	$u(n)$	$u(n) \times n$
324	86419753	2799999972
405	135802469	54999999945
486	61316872	2979999792
648	45987654	2979999792
972	30658436	2979999792

Zajmiemy się teraz liczbami palindromicznymi występującymi w ciągach arytmetycznych o wyrazach naturalnych.

2.3.8. *W każdym niestałym ciągu arytmetycznym o wyrazach naturalnych, w którym istnieje co najmniej jeden wyraz niepodzielny przez 10, istnieje nieskończenie wiele liczb palindromicznych.* ([MM] 70(3)(1997) s.226).

D. Rozważmy ciąg arytmetyczny $a_n = a + nr$, w którym a jest nieujemną liczbą całkowitą oraz r jest liczbą naturalną i załóżmy, że co najmniej jeden wyraz tego ciągu nie jest podzielny przez 10. Jeśli $a = 0$, to $10 \nmid r$ i wtedy teza wynika ze stwierdzenia 2.3.5. W przypadku $r = 1$ nie ma czego dowodzić. Możemy więc założyć, że $a \geqslant 1$ oraz $r \geqslant 2$. Rozpatrzmy dwa przypadki.

`Przypadek 1.` Załóżmy, że liczby r i 10 są względnie pierwsze. Jeśli w tym przypadku liczba a jest podzielna przez 10, to rozpatrujemy dany ciąg arytmetyczny począwszy od wyrazu $a_1 = a + r$,

który nie jest podzielny przez 10. Możemy więc w dalszym ciągu założyć, że ostatnia cyfra liczby a jest różna od zera. Niech s będzie liczbą cyfr liczby a i niech b będzie liczbą powstałą z cyfr liczby a zapisanych w odwrotnej kolejności. Dla każdej nieujemnej liczby całkowitej t rozpatrzmy dwie liczby A_t i B_t zdefiniowane w następujący sposób.

$$A_t = b \cdot 10^{t\varphi(r)+s+1} + \left(\sum_{j=0}^{t} \left(10^{\varphi(r)}\right)^j \right) \cdot 10^s, \qquad B_t = A_t + a.$$

Jest oczywiste, że każda taka liczba B_t (dla dowolnego $t \in \mathbb{N}_0$) jest palindromiczna. Wykażemy, że istnieje takie $t \in \mathbb{N}_0$, że liczba A_t jest podzielna przez r. W tym celu wykorzystamy znane twierdzenie Eulera. Ponieważ $\text{nwd}(m, 10) = 1$, więc na mocy tego twierdzenia liczba $10^{\varphi(r)} - 1$ jest podzielna przez r. Dla każdej więc nieujemnej liczby całkowitej t mamy kongruencję $A_t \equiv b10^{s+1} + 10^s(t+1) \pmod r$, czyli kongruencję

$$A_t \equiv 10^s t + c \pmod r,$$

gdzie $c = b10^{s+1} + 10^s$. Ponieważ $\text{nwd}(r, 10) = 1$, więc istnieje taka liczba całkowita v, że $10^s v \equiv 1 \pmod r$. Przyjmijmy teraz, że t jest taką nieujemną liczbą całkowitą, która spełnia kongruencję

$$t \equiv -vc \pmod r.$$

Takich liczb t mamy oczywiście nieskończenie wiele. Dla każdego takiego t liczba A_t jest podzielna przez r; sprawdźmy:

$$A_t \equiv 10^s t + c \equiv 10^s(-vc) + c = -(10^s v)c + c \equiv -c + c = 0 \pmod r.$$

Dla każdego więc takiego t, palindromiczna liczba B_t jest postaci $a + mr$, gdzie $m \in \mathbb{N}$; jest więc wyrazem danego ciągu arytmetycznego.

`Przypadek 2.` Załóżmy, teraz że liczby r i 10 nie są względnie pierwsze. W tym przypadku $r = 2^{d_2}5^{d_5}r_1$, gdzie r_1 jest liczbą naturalną względnie pierwszą z dziesiątką oraz co najmniej jedna z liczb d_2, d_5 jest większa od zera. Jeśli liczby d_2 i d_5 są jednocześnie większe od zera, to $10 \nmid a$ (ponieważ w danym ciągu arytmetycznym co najmniej jeden wyraz nie jest podzielny przez 10). Jeśli natomiast dokładnie jedna z liczb d_2, d_5 jest większa od zera oraz wyraz $a_0 = a$ jest podzielny przez 10, to rozpatrujemy dany ciąg arytmetyczny począwszy od wyrazu $a_1 = a + r$, który nie jest podzielny przez 10. Możemy więc w każdej sytuacji założyć, że ostatnia cyfra liczby a jest różna od zera. Niech s_1 będzie liczbą cyfr liczby a i niech b będzie liczbą powstałą z cyfr liczby a zapisanych w odwrotnej kolejności. Ponadto, niech

$$s = \max(s_1, d_2, d_5).$$

Dla każdej nieujemnej liczby całkowitej t rozpatrujemy dwie liczby A_t i B_t zdefiniowane dokładnie tak samo jak w Przypadku 1 z tym, że liczbę r zastępujemy liczbą r_1. Każda liczba B_t jest palindromiczna, a kazżda liczba A_t jest podzielna przez $2^{d_1}5^{d_5}$. Dokładnie w ten sam sposób, jak w Przypadku 1, wykazujemy, że istnieje nieskończenie wiele takich liczb t, dla których liczba A_t jest podzielna przez r_1. Dla takich t liczba A_t jest więc podzielna przez $2^{d_2}5^{d_5}r_1$, czyli jest podzielna przez r, a więc palindromiczne B_t jest postaci $a + mr$, gdzie $m \in \mathbb{N}$; jest więc wyrazem danego ciągu arytmetycznego. ⊠

2.3.9. *Istnieje liczba palindromiczna podzielna przez* 1993 *i posiadająca co najmniej* 444 *cyfry.* ([Berk] 7b/93).

2.3.10. *Jeśli* $n \geqslant 111$ *i* $\text{nwd}(n, 10) = 1$, *to istnieje liczba palindromiczna podzielna przez* n *i mająca mniej niż* $\frac{n}{\pi+1}$ *cyfr.* ([Zw] 1995).

2.3.11. *Jeśli liczby n i $n+1995$ są palindromiczne, to $n=7$ lub $n=777$.*
([OM] Moskwa 1994/1995).

2.3.12. *Jeśli liczby n i $3n$ są palindromiczne, to liczba $2n$ też jest palindromiczna.*
([OM] St Petersburg 2002).

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

2.4 Liczby Lychrela

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

W poprzednich dwóch podrozdziałach zajmowliśmy się liczbami palindromicznymi. W tym podrozdziale również pojawią się liczby palindromiczne. Interesować nas teraz będą liczby, które oznaczać będziemy przez $\gamma(n)$, gdzie $n \in \mathbb{N}$. Jeśli n jest dowolną liczbą naturalną, to definiujemy:

$$\gamma(n) = n + n'.$$

Przypomnijmy, że przez n' oznaczamy liczbę powstałą z cyfr liczby naturalnej n zapisanych w odwrotnej kolejności. Mamy na przykład: $\gamma(35) = 35+53 = 88$, $\gamma(990) = 990+99 = 1089$. Dla danej liczby naturalnej n rozważać będziemy ciąg postaci

$$\gamma^1(n),\ \gamma^2(n),\ \gamma^3(n),\ \dots,$$

gdzie $\gamma^1(n) = \gamma(n)$, $\gamma^2(n) = \gamma(\gamma(n))$, $\gamma^3(n) = \gamma(\gamma(\gamma(n)))$, itd; $\gamma^{k+1}(n) = \gamma\left(\gamma^k(n)\right)$ dla wszystkich $k \geqslant 2$. Na przykład dla $n = 174$ mamy:

$$\begin{array}{rcrcrrcrcr}
\gamma^1(174) & = & 174+471 & = & 645, & \gamma^4(174) & = & 3102+2013 & = & 5115,\\
\gamma^2(174) & = & 645+546 & = & 1191, & \gamma^5(174) & = & 5115+5115 & = & 10230,\\
\gamma^3(174) & = & 1191+1911 & = & 3102, & \gamma^6(174) & = & 10230+3201 & = & 13431.
\end{array}$$

Zauważmy, że $\gamma^4(174)$ jest liczbą palindromiczną. W tym przypadku 4 jest najmniejszą taką liczbą naturalną k, że liczba $\gamma^k(174)$ jest palindromiczna.

Jeśli dla danej liczby naturalnej n istnieje taka liczba naturalna k, że $\gamma^k(n)$ jest liczbą palindromiczną, to w tym podrozdziale najmniejszą liczbę k o tej własności nazywać będziemy *rangą* liczby n i oznaczać ją będziemy przez $r(n)$. Mówić będziemy również w tym przypadku, że n ma *skończoną rangę*. Jeśli natomiast taka liczba k nie istnieje, to mówić będziemy, że n ma *nieskończoną rangę* i pisać będziemy $r(n) = \infty$. Dla przykładu rozpatrywana wcześniej liczba 174 ma skończoną rangę równą 4.

2.4.1. *Rangi wszystkich liczb naturalnych* $\leqslant 100$.

1	1	11	1	21	1	31	1	41	1	51	1	61	1	71	1	81	1	91	2
2	1	12	1	22	1	32	1	42	1	52	1	62	1	72	1	82	2	92	1
3	1	13	1	23	1	33	1	43	1	53	1	63	1	73	2	83	1	93	2
4	1	14	1	24	1	34	1	44	1	54	1	64	2	74	1	84	2	94	2
5	2	15	1	25	1	35	1	45	1	55	2	65	1	75	2	85	2	95	3
6	2	16	1	26	1	36	1	46	2	56	1	66	2	76	2	86	3	96	4
7	2	17	1	27	1	37	2	47	1	57	2	67	2	77	3	87	4	97	6
8	2	18	1	28	2	38	1	48	2	58	2	68	3	78	4	88	6	98	24
9	2	19	2	29	1	39	2	49	2	59	3	69	4	79	6	89	24	99	6
10	1	20	1	30	1	40	1	50	1	60	1	70	1	80	1	90	1	100	1

Jest 58 *liczb rangi* 1, 27 *rangi* 2, 5 *rangi* 3, 4 *rangi* 4 *oraz* 4 *rangi* 6. *Nie ma liczb rangi* 5. *Są jeszcze dwie liczby, mianowicie* 89 *i* 98, *rangi* 24.

Wszystkie liczby naturalne $n \leqslant 100$ mają skończoną rangę. Tak samo jest dla wszystkich liczb naturalnych $n \leqslant 195$. Z liczbą 196 jest pewien kłopot. Spójrzmy na 50 początkowych wyrazów ciągu $\left(\gamma^k(n)\right)_{k\in\mathbb{N}}$ dla $n = 196$:

(1)	887,	(26)	17602285712176,
(2)	1675,	(27)	84724043932847,
(3)	7436,	(28)	159547977975595,
(4)	13783,	(29)	755127757721546,
(5)	52514,	(30)	1400255515443103,
(6)	94039,	(31)	4413700670963144,
(7)	187088,	(32)	8827391431036288,
(8)	1067869,	(33)	17653692772973576,
(9)	10755470,	(34)	85191620502609247,
(10)	18211171,	(35)	159482241005228405,
(11)	35322452,	(36)	664304741147513356,
(12)	60744805,	(37)	1317620482294916822,
(13)	111589511,	(38)	3603815405135183953,
(14)	227574622,	(39)	7197630720180367016,
(15)	454050344,	(40)	13305261530450734933,
(16)	897100798,	(41)	47248966933966985264,
(17)	1794102596,	(42)	93507933867933969538,
(18)	8746117567,	(43)	177104867844767940077,
(19)	16403234045,	(44)	947154635293536341848,
(20)	70446464506,	(45)	1795298270686072793597,
(21)	130992928913,	(46)	9749270977546801719568,
(22)	450822227944,	(47)	18408442064004592449047,
(23)	900544455998,	(48)	92502871604050616929528,
(24)	1800098901007,	(49)	175095833209091234750057,
(25)	8801197801088,	(50)	925153265399993573340628.

Nie pojawia się żadna liczba palindromiczna. Nie wiadomo czy liczba 196 ma skończoną rangę. Wiadomo, że jeśli ma to ta ranga jest większa od bardzo wielkiej liczby. Podobnie jest z liczbami:

$$295, 394, 493, 592, 689, 691, 788, 790, 879, 887, 978, 986,$$
$$1495, 1497, 1585, 1587, 1675, 1677, 1765, 1767, 1855, 1857, 1945, 1947, 1997.$$

Nie wiadomo jakie są rangi tych liczb. Czy te rangi są skończone? Wszystkie tego rodzaju liczby naturalne są nazywane *liczbami Lychrela*. Wypisaliśmy (za pomocą komputera) wszystkie liczby Lychrela mniejsze od 2000. Takich liczb istnieje znacznie więcej.

Definicja nie jest precyzyjna. Liczba naturalna, o której dzisiaj mówi się, że jest liczbą Lychrela w omawianym sensie, może w przyszłości okazać sią, że nie jest taką liczbą. To, że dzisiaj nie znamy rangi jakiejś danej liczby naturalnej, nie świadczy o tym , że tej rangi nigdy w przyszłości nie poznamy. Podajmy inną definicję. Mówić będziemy (ale tylko w tym podrozdziale), że liczba naturalna n jest *Lychrela*, jeśli jej ranga $r(n)$ jest większa od miliona. W szczególności każda liczba naturalna o nieskończonej randze jest liczbą Lychrela. Nie wiadomo czy tego rodzaju liczb Lychrela jest nieskończenie wiele. Nie wiadomo również czy istnieje chociaż jedna liczba naturalna mająca nieskończoną rangę.

2.4.2 (Maple). *Niech* $c(k)$ *oznacza liczbę tych wszystkich liczb naturalnych* n *z przedziału* $[1, 1000]$, *których ranga* $r(n)$ *jest równa* k. *W przedziale* $[1, 1000]$ *jest* 13 *liczb Lychrela oraz:*

$$\begin{array}{rclrclrcl} c(1) &=& 291, & c(7) &=& 18, & c(16) &=& 1,\\ c(2) &=& 339, & c(8) &=& 10, & c(17) &=& 5,\\ c(3) &=& 158, & c(10) &=& 2, & c(19) &=& 1,\\ c(4) &=& 84, & c(11) &=& 8, & c(22) &=& 2,\\ c(5) &=& 33, & c(14) &=& 2, & c(23) &=& 8,\\ c(6) &=& 15, & c(15) &=& 8, & c(24) &=& 2, \end{array}$$

2.4.3 (Maple). *Niech* $d(k)$ *oznacza liczbę tych wszystkich liczb naturalnych* n *z przedziału* $[1, 10\,000]$, *których ranga* $r(n)$ *jest równa* k. *W przedziale* $[1, 10\,000]$ *jest* 249 *liczb Lychrela oraz:*

$$\begin{array}{rclrclrcl} d(1) &=& 2838, & d(9) &=& 64, & d(17) &=& 14,\\ d(2) &=& 2892, & d(10) &=& 13, & d(18) &=& 27,\\ d(3) &=& 1356, & d(11) &=& 52, & d(19) &=& 1,\\ d(4) &=& 926, & d(12) &=& 110, & d(20) &=& 26,\\ d(5) &=& 423, & d(13) &=& 70, & d(21) &=& 64,\\ d(6) &=& 405, & d(14) &=& 4, & d(22) &=& 2,\\ d(7) &=& 248, & d(15) &=& 83, & d(23) &=& 8,\\ d(8) &=& 64, & d(16) &=& 59, & d(24) &=& 2. \end{array}$$

2.4.4 (Maple). *Najmniejsze liczby naturalne* n *o danej randze* r. *W pierwszej kolumnie podano rangę* r, *a w następnych kolumnach mamy kolejno: minimalną liczbę* n, *końcową liczbą palindromiczną* u *i liczbę cyfr liczby* u. *Zbadano wszystkie liczby naturalne* $n \leqslant 10^5$.

1	1	2	1	22	869	8813200023188	13
2	5	11	2	23	187	8813200023188	13
3	59	1111	4	24	89	8813200023188	13
4	69	4884	4	25	10797	1676404554046761	16
5	166	45254	5	26	10853	4455597447955544	16
6	79	44044	5	27	10921	4455597447955544	16
7	188	233332	6	28	10971	8802202552022088	16
8	193	233332	6	29	13297	893974888888479398	18
9	1397	88555588	8	30	10548	17858768886785871	17
10	829	88555588	8	31	13293	17858768886785871	17
11	167	88555588	8	32	17793	44035358885353044	17
12	2069	52788725	8	33	20889	44035358885353044	17
13	1797	8836886388	10	37	80359	6839849878998789489386	22
14	849	8836886388	10	38	13697	6839849878998789489386	22
15	177	8836886388	10	39	10794	6832123695335963212386	22
16	999	8939779398	10	40	15891	6832123695335963212386	22
17	739	5233333325	10	47	70759	14525756544499444565752541	26
18	1798	89540004598	11	52	70269	4668731596684224866951378664	28
19	989	89540004598	11	53	10677	4668731596684224866951378664	28
20	6999	16668488486661	14	54	10833	4668731596684224866951378664	28
21	1297	8813200023188	13	55	10911	4668731596684224866951378664	28

Zbadałem za pomocą komputera rangi wszystkich liczb naturalnych mniejszych od miliona. Liczba 600 279 jest najmniejszą liczbą naturalną o randze 50 (końcowa liczba palindromiczna ma 28 cyfr). Liczba 190 890 jest najmniejszą liczbą naturalną o randze 60 (końcowa liczba palindromiczna ma 31 cyfr). Wśród liczb mniejszych od miliona największą rangę ma

150 296; rangą jest 64, a końcowa liczba palindromiczna ma 33 cyfry. W internecie jest bardzo dużo różnych stron dotyczących omawianego zagadnienia. Znajdziemy tam na przykład informację, że w 2011 roku znaleziono liczbę o randze 261; ma ona 19 cyfr, a jej końcowa liczba palindromiczna ma 119 cyfr.

★ A. Brousseau, *Palindromes by addition in base two*, [MM] 42(5)(1969) 254-256.
K. Brown, *Digit reversal sums leading to palindromes.*
Ch. W. Trigg, *Palindromes by Addition*, [MM] 40(1)(1967) 26-28.
Ch. W. Trigg, *More on palindromes by reversal-addition*, [MM] 45(4)(1972) 184-186.

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

2.5 Przestawianie pierwszej cyfry na koniec

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

Jeśli n jest liczbą naturalną, to przez $\widehat{n}$ oznaczać będziemy liczbę otrzymaną z liczby n przez przestawienie jej pierwszej cyfry na koniec. Przykład: jeśli $n = 123456$, to $\widehat{n} = 234561$.

2.5.1. *Jeśli $\widehat{n}/n$ jest liczbą całkowitą, to $\widehat{n}/n = 1$ lub 3.* ([ShCY] 20-22).

2.5.2. *Niech n będzie taką liczbą naturalną, że*

$$\widehat{n} = 3n.$$

Oznaczmy przez a pierwszą cyfrę liczby n. Wtedy:

(1) *$a = 1$ lub $a = 2$;*

(2) *najmniejszą taką liczbą n dla $a = 1$ jest 142857;*

(3) *jeśli $a = 1$, to $n = cc\dots c$, gdzie c jest grupą cyfr 142857;*

(4) *najmniejsze n dla $a = 2$ jest równe 285714;*

(5) *jeśli $a = 2$, to $n = dd\dots d$, gdzie d jest grupą cyfr 285714.* ([ShCY] 19).

2.5.3. *Znaleźć najmniejszą liczbę naturalną n spełniającą równość $3\widehat{n} = n$ jeśli wiadomo, że jej pierwszą cyfrą jest 7.* ([Mat] 4/1949 47, [ShCY] 23).

O. 7 241 379 310 344 827 586 206 896 551. Liczbę tę otrzymamy mnożąc przez 21 okres rozwinięcia dziesiętnego liczby 1/29. ⊠

2.5.4. *Najmniejszą liczbą naturalną n spełniającą równość $4\widehat{n} = n$, z pierwszą cyfrą równą 4, jest 410 256.* ([GaT] 3/83).

2.5.5. *Jeśli $\widehat{n} = \frac{7}{2}n$, to n jest postaci 153846 153846 … 153846.* ([OM] RPA).

2.5.6. *Dla naturalnej liczby $n = 46$ można znaleźć naturalną liczbę*

$$m = 4601000217438573602295716$$

spełniającą następujące warunki.

(1) *Początkowe cyfry liczby m tworzą liczbę n.*

(2) *Jeśli te początkowe cyfry liczby m przeniesiemy na koniec, to (skreślając początkowe zera, jeśli występują) otrzymamy liczbę $m_1 = 100021743857360229571646$, która jest n razy mniejsza od liczby m.*

Dla jakich liczb naturalnych n istnieje liczba m spełniająca takie warunki ?
([Kw] 2003/6 M1865 s.16).

O. Taka liczba m istnieje dla każdej liczby naturalnej n. Dla $n = 46$ liczba m ma 22 cyfry. Dla $n = 48$ liczba m ma ponad 4 tysiące cyfr. ⊠

★ P. A. Braza, J. Tong, *Moving the first digit to the last*, [MG] 497(1999) 216-220.

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

2.6 Przestawianie ostatniej cyfry na początek

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

Niech n będzie liczbą naturalną. Przez $\underline{n}$ oznaczać będziemy liczbę naturalną otrzymaną z liczby n przez przestawienie jej ostatniej cyfry na początek. Jeśli, na przykład, $n = 123456$, to $\underline{n} = 612345$.

Przez $n^{[s]}$ (gdzie $s \in \mathbb{N}$) oznaczać będziemy liczbę naturalną powstałą z s kopii liczby n zapisanych obok siebie. Przykłady:

$$123^{[3]} = 123123123, \quad 2234^{[2]} = 22342234.$$

Jeśli n jest liczbą k-cyfrową, to liczba $n^{[s]}$ ma dokładnie ks cyfr.

Załóżmy, że n_0 jest ostatnią cyfrą k-cyfrowej liczby n. Łatwo wykazać następujące trzy równości.

2.6.1. $10\underline{n} = n_0(10^k - 1) + n.$

2.6.2. $(10^k - 1)n^{[s]} = n(10^{ks} - 1).$

2.6.3. $10\underline{n^{[s]}} = n_0(10^{ks} - 1) + n^{[s]}.$

Niech a i b będą ustalonymi liczbami naturalnymi. Rozpatrzmy równanie

$$(*) \qquad \boxed{a\underline{x} = bx}.$$

2.6.4. *Jeśli liczba naturalna n jest rozwiązaniem równania $(*)$, to każda liczba postaci $n^{[s]}$, gdzie $s \in \mathbb{N}$, również jest rozwiązaniem tego równania.*

W szczególności, jeśli równanie $(*)$ posiada rozwiązanie naturalne, to ma ono nieskończenie wiele rozwiązań naturalnych.

D. Załóżmy, że k-cyfrowa liczba naturalna n jest rozwiązaniem równania $(*)$. Wówczas, na mocy 2.6.1, mamy równość:

$$b/a = \underline{n}/n = (10\underline{n})/(10n) = \frac{n_0(10^k-1)+n}{10n},$$

gdzie n_0 jest ostatnią cyfrą liczby n. Korzystając z tej równości oraz z 2.6.2 i 2.6.3 otrzymujemy:

$$\begin{aligned}\left(\underline{n^{[s]}}\right) / \left(n^{[s]}\right) &= \left(10\underline{n^{[s]}}\right) / \left(10n^{[s]}\right) = \frac{n_0(10^{ks}-1)+n^{[s]}}{10n^{[s]}} \\ &= \frac{(10^k-1)\left(n_0(10^{ks}-1)+n^{[s]}\right)}{10(10^k-1)n^{[s]}} = \frac{(10^k-1)n_0(10^{ks}-1)+(10^k-1)n^{[s]}}{10(10^k-1)n^{[s]}} \\ &= \frac{(10^k-1)n_0(10^{ks}-1)+n(10^{ks}-1)}{10n(10^{ks}-1)} = \frac{n_0(10^k-1)+n}{10n} = (10\underline{n})/(10n) = \underline{n}/n = \frac{b}{a}.\end{aligned}$$

Zatem $a\underline{n^{[s]}} = bn^{[s]}$ i to kończy dowód. ⊠

2.6.5. *Niech $n \in \mathbb{N}$. Jeśli dla pewnego $s \in \mathbb{N}$ liczba $n^{[s]}$ jest rozwiązaniem równania $(*)$, to liczba n również jest rozwiązaniem równania $(*)$.* (Wynika z dowodu 2.6.4).

2.6.6. *Dla danej liczby naturalnej k oraz dla danej cyfry $p \in \{0, 1, \dots, 9\}$ istnieje co najwyżej jedna liczba naturalna n będąca rozwiązaniem równania $(*)$, która ma dokładnie k cyfr i której ostatnią cyfrą jest p.*

D. Przypuśćmy, że k-cyfrowe liczby naturalne n i m o ostatniej cyfrze p są rozwiązaniami równania $(*)$. Wówczas (na mocy 2.6.1) $10\underline{n} = p(10^k - 1) + n$ oraz $\underline{m} = p(10^k - 1) + m$. Mamy zatem:

$$\tfrac{b}{a} = \underline{n}/n = (10\underline{n})/(10n) = \tfrac{p(10^k-1)+n}{10n} \quad \text{oraz} \quad \tfrac{b}{a} = \underline{m}/m = (10\underline{m})/(10m) = \tfrac{p(10^k-1)+m}{10m},$$

czyli $\frac{p(10^k-1)+n}{10n} = \frac{p(10^k-1)+m}{10m}$. Stąd otrzymujemy równość $\frac{p(10^k-1)}{10n} + \frac{1}{10} = \frac{p(10^k-1)}{10m} + \frac{1}{10}$, z której wynika, że

$$\tfrac{p(10^k-1)}{10n} = \tfrac{p(10^k-1)}{10m}.$$

Stąd mamy: $\frac{1}{10n} = \frac{1}{10m}$, a zatem $n = m$. ⊠

2.6.7. *Jeśli równanie $(*)$ posiada rozwiązanie naturalne, to $\frac{1}{10} \leqslant \frac{b}{a} < 10$.*

D. Niech k-cyfrowa liczba n będzie rozwiązaniem równania $(*)$. Jeśli jej ostatnią cyfrą jest zero, to $b/a = \underline{n}/n = 1/10$.

Załóżmy, że ostatnią cyfrą liczby n nie jest zero. Wtedy liczba $\underline{n}$ jest również k-cyfrowa. Zatem $10^{k-1} \leqslant n < 10^k$ oraz $10^{k-1} \leqslant \underline{n} < 10^k$. Stąd mamy: $b/a = \underline{n}/n < 10^k/n \leqslant 10^k/10^{k-1} = 10$, czyli $b/a < 10$. Podobnie: $b/a = \underline{n}/n \geqslant 10^{k-1}/n > 10^{k-1}/10^k = 1/10$, czyli $b/a > 1/10$. ⊠

2.6.8. *Niech $b \in \mathbb{N}$. Jeśli istnieje liczba naturalna n taka, że $\underline{n} = bn$, to $1 \leqslant b \leqslant 9$.* (Wynika z 2.6.7.).

Z poniższych zadań wynika, że dla każdej liczby naturalnej $b \in \{1, 2, 3, \dots, 9\}$ istnieje liczba naturalna n taka, że $\underline{n} = bn$. Dla $b = 1$ jest to oczywiste (np. $n = 99$ spełnia równość $\underline{n} = n$).

2.6.9. *Cyfrą jedności pewnej liczby naturalnej jest 2. Wiadomo, że $\underline{n} = 2n$. Znaleźć tę liczbę.* ([Mat] 2/1949 43).

O. Np. $n = 105263157894736842$. Zadanie ma nieskończenie wiele rozwiązań. Warunki spełnia bowiem każda liczba postaci $n^{[s]}$ (patrz 2.6.4). Liczba n jest okresem rozwinięcia dziesiętnego liczby $1/95$. Dokładniej: $1/95 = 0,0(105263157894736842)$. ⊠

2.6.10. *Najmniejsze rozwiązania równania $\underline{n} = 2n$ z ostatnią cyfrą $2, 3, \dots, 9$:*

105263157894736842,	210526315789473684,	315789473684210526,	421052631578947368,
157894736842105263,	263157894736842105,	368421052631578947,	473684210526315789.

Są to 18-cyfrowe liczby. Nie ma rozwiązania z ostatnią cyfrą 1. (Maple).

2.6.11. *Najmniejszą liczbą naturalną n taką, że $\underline{n} = 3n$ jest*

$$n = 1\,034\,482\,758\,620\,689\,655\,172\,413\,793.$$

Liczba ta ma 28 cyfr i występuje w rozwinięciu dziesiętnym ułamka $\frac{3}{29}$. Mamy bowiem: $\frac{3}{29} = 0,(134\,482\,758\,620\,689\,655\,172\,413\,793)$. ([MG] 48(499)(2000) Problem 1999.5).

2.6.12. *Najmniejsze rozwiązania równania* $\underline{n} = 3n$*:*

1034482758620689655172413793, 2413793103448275862068965517,
1379310344827586206896551724, 2758620689655172413793103448,
1724137931034482758620689655, 3103448275862068965517241379.
2068965517241379310344827586,

Są to 28*-to cyfrowe liczby. Nie ma rozwiązań z ostatnimi cyframi* 1 *i* 2. (Maple).

2.6.13. *Cyfrą jedności pewnej liczby naturalnej* n *jest* 6*. Wiadomo, że* $\underline{n} = 4n$*. Znaleźć najmniejszą taką liczbę.* Odp. 153 846. ([IMO] 4, [MoP] 20).

2.6.14. *Rozpatrzmy równanie* $\underline{n} = 4n$*, gdzie* $n \in \mathbb{N}$*.*

(1) *Jeśli liczba naturalna* n *spełnia to równanie, to ma co najmniej* 6 *cyfr.*

(2) *Istnieje dokładnie* 6 *sześciocyfrowych liczb naturalnych* n *spełniających to równanie. Są to liczby:*

102564, 128205, 153846, 179487, 205128, 230769.

Liczby te są okresami rozwinięć dziesiętnych odpowiednio liczb wymiernych $4/39$*,* $5/39$*,* $6/39 = 2/13$*,* $7/39$*,* $8/39$ *i* $9/39 = 3/13$*.*

(3) *Nie ma rozwiązań z ostatnimi cyframi* 1*,* 2 *i* 3. (Maple).

2.6.15. *Najmniejszą liczbą naturalną* n *spełniającą równość* $\underline{n} = 5n$ *jest* $n = 142857$*. Liczba ta występuje w rozwinięciu dziesiętnym liczby* $1/7$*; dokładniej:* $1/7 = 0,(142857)$*. Nie ma innych liczb* n *mniejszych od* 90 000 000 *spełniających równość* $\underline{n} = 5n$*.* ([Ko02], Maple).

2.6.16. *Najmniejsze rozwiązania równania* $\underline{n} = 5n$ *z ostatnią cyfrą równą odpowiednio* $5, \ldots, 9$*:*

102040816326530612244897959183673469387755,
122448979591836734693877551020408163265306,
142857,
163265306122448979591836734693877551020408,
183673469387755102040816326530612244897959,

Są to 42*-to cyfrowe liczby (z wyjątkiem liczby środkowej). Nie ma rozwiązań z ostatnimi cyframi* $1, 2, 3$ *i* 4. (Maple).

2.6.17. *Najmniejsze rozwiązania równania* $\underline{n} = 6n$ *z ostatnimi cyframi* $6, 7, 8, 9$*:*

1016949152542372881355932203389830508474576271186440677966,
1186440677966101694915254237288135593220338983050847457627,
1355932203389830508474576271186440677966101694915254237288,
1525423728813559322033898305084745762711864406779661016949.

Są to 58*-cyfrowe liczby. Nie ma rozwiązań z ostatnimi cyframi* $1, 2, 3, 4$ *i* 5. (Maple).

2.6.18. *Najmniejsze rozwiązania równania* $\underline{n} = 7n$*:*

1014492753623188405797, 1159420289855072463768, 1304347826086956521739.

Są to 22*-cyfrowe liczby. Nie ma rozwiązań o innych końcowych cyfrach.* (Maple).

2.6.19. *Najmniejsze rozwiązania równania* $\underline{n} = 8n$*:*

$$1012658227848, \quad 1139240506329.$$

Są to 13*-cyfrowe liczby. Nie ma rozwiązań o innych końcowych cyfrach.* (Maple).

2.6.20. *Liczbą naturalną* n *spełniającą równość* $\underline{n} = 9n$ *jest*

$$n = 10112359550561797752808988764044943820224719.$$

Liczba ta ma 44 *cyfry i jest okresem rozwinięcia dziesiętnego liczby* $1/89$*. Ostatnią cyfrą wszystkich naturalnych rozwiązań tego równania jest* 9*.* (Maple).

2.6.21. *Nie istnieje* $n \in \mathbb{N}$ *takie, że* $2\underline{n} = n$*.*

D. Przypuśćmy, że takie n istnieje. Niech n_0 będzie jego ostatnią cyfrą i k liczbą cyfr. Oczywiście $n_0 \neq 0$. Wtedy $10\underline{n} = 5n$, więc (na mocy 2.6.1) $n_0(10^k - 1) + n = 5n$, czyli $n_0(10^k - 1) = 4n$. Ponieważ $10^k - 1$ jest względnie pierwsze z 4, cyfra n_0 jest równa albo 4 albo 8. Jeśli $n_0 = 4$, to $n = 10^k - 1 = 99\dots99$ i mamy sprzeczność. Jeśli $n_0 = 8$, to $n = 2(10^k - 1)$ i znowu jest sprzeczność, gdyż liczba $2(10^k - 1)$ ma $k + 1$ cyfr. ⊠

2.6.22. *Rozpatrzmy równanie* $2\underline{n} = 3n$*, gdzie* $n \in \mathbb{N}$*.*

(1) *Jeśli liczba naturalna* n *spełnia to równanie, to ma co najmniej* 6 *cyfr.*

(2) *Istnieją dokładnie* 2 *sześciocyfrowe liczby naturalne* n *spełniające to równanie. Są to liczby* $n = 285714$ *i* $2n = 571428$*. Liczby te są okresami rozwinięć dziesiętnych odpowiednio liczb wymiernych* $8/28 = 2/7$ *i* $16/28 = 4/7$*.*

(3) *Nie ma innych liczb naturalnych* n *mniejszych od* 90 000 000 *spełniających to równanie.* (Maple).

2.6.23. *Nie istnieje* $n \in \mathbb{N}$ *takie, że* $2\underline{n} = 5n$*.*

D. Przypuśćmy, że takie n istnieje. Niech n_0 będzie jego ostatnią cyfrą i k liczbą cyfr. Oczywiście $n_0 \neq 0$. Wtedy $10\underline{n} = 25n$, więc (na mocy 2.6.1) $n_0(10^k - 1) + n = 25n$, czyli $n_0(10^k - 1) = 24n$. Ponieważ $10^k - 1$ jest względnie pierwsze z 8, cyfra n_0 jest równa 8. Zatem $10^k - 1 = 3n$ i stąd $n = 33\dots33$ wbrew temu, że ostatnią cyfrą jest 8. ⊠

Mówimy, że rozwiązanie n równania $(*)$ jest *istotne*, jeśli n nie jest postaci $m^{[s]}$ dla pewnych liczb naturalnych $m \geqslant 1$ i $s \geqslant 2$.

2.6.24. *Istotne rozwiązania naturalne równania* $2\underline{n} = bn$ *dla pewnych* b*.*

(1) $b = 7$, $n = 1012658227848, \ 1139240506329$*;*

(2) $b = 9, \ n = 18$*;*

(3) $b = 11, \ n = 148$*;*

(4) $b = 15, \ n = 108$*;*

(5) *Równanie* $2\underline{n} = bn$*, gdzie* $2 \nmid b$*, posiada naturalne rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy* b *jest jedną z liczb:* $3, 7, 9, 11$ *i* 15*.* (Maple).

2.6.25. *Istotne rozwiązania naturalne równania* $3\underline{n} = bn$ *dla pewnych* b.

(1) $b = 1$, $n = 428571$, 857142;

(2) $b = 2$, $n = 1764705882352941$, 3529411764705882, 5294117647058823, 7058823529411764, 8823529411764705, (16-*cyfrowe liczby*);

(3) $b = 4$, $n = 162$, 243, 324, 405, 486, 567, 648, 729;

(4) $b = 5$, *jest* 8 *rozwiązań* 46-*cyfrowych;*

(5) $b = 7$, *jest* 7 *rozwiązań* 33-*cyfrowych;*

(6) $b = 8$, $n = 27$, 116883, 155844, 194805, 233766, 311688, 350649;

(7) $b = 10$, *jest* 6 *rozwiązań* 96-*cyfrowych;*

(8) $b = 11$, *jest* 6 *rozwiązań* 53-*cyfrowych;*

(9) $b = 14$, $n = 10948905$, 13138686, 15328467, 17518248, 19708029;

(10) *Równanie* $3\underline{n} = bn$, *gdzie* $3 \nmid b$, *posiada naturalne rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy* b *jest jedną z liczb:* $1, 2, 4, 7, 8, 10, 11, 13, 14, 16, 17, 19, 20, 22, 23, 25, 26$.

(11) *Najmniejsze rozwiązanie dla* $b = 17$ *ma* 166 *cyfr. Najmniejsze rozwiązanie dla* $b = 26$ *ma* 256 *cyfr.* (Maple).

2.6.26. *Nie istnieje* $n \in \mathbb{N}$ *takie, że* $4\underline{n} = n$.

D. Przypuśćmy, że takie n istnieje. Niech n_0 będzie jego ostatnią cyfrą (oczywiście $n_0 > 0$) i k liczbą cyfr. Wtedy $20\underline{n} = 5n$, więc (na mocy 2.6.1) $2(n_0(10^k - 1) + n) = 5n$, czyli $2n_0(10^k - 1) = 3n$, tzn. $n = n_0(66\ldots66)$. Ponieważ n ma k cyfr, więc jedynie $n_0 = 1$, ale wówczas n ma na końcu 6; sprzeczność. ⊠

2.6.27. *Istotne rozwiązania naturalne równania* $4\underline{n} = bn$ *dla pewnych* b.

(1) $b = 3$, $n = 307692$, 615384, 923076;

(2) $b = 5$, $n = 1739130434782608695652$, 3478260869565217391304, 5217391304347826086956, 6956521739130434782608. *Każda z tych liczb ma* 22 *cyfry.*

(3) $b = 7$, $n = 12$, 24, 36, 48;

(4) $b = 9$, $n = 186046511627906976744$, 279069767441860465116, 372093023255813953488 (21-*cyfrowe liczby*);

(5) $b = 11$, $n = 1509433962264$, 2264150943396, 3018867924528 (13-*cyfrowe liczby);*

(6) $b = 13$, $n = 126984$, $190476, 253968$;

(7) $b = 15$, $n = 10958904$, 16438356, 21917808;

(8) $b = 25$, $n = 13008$;

(9) $b = 29$, $n = 111888$.

(10) *Równanie* $4\underline{n} = bn$, *gdzie* $\text{nwd}(4, b) = 1$, *posiada naturalne rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy* b *jest jedną z liczb:* $3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 31$.

(11) *Najmniejsze rozwiązanie dla* $b = 23$ *ma* 112 *cyfr. Są dwa takie rozwiązania.* (Maple).

2.6.28. *Nie istnieje* $n \in \mathbb{N}$ *takie, że* $5\underline{n} = 2n$.

D. Przypuśćmy, że takie n istnieje. Niech n_0 będzie jego ostatnią cyfrą (oczywiście $n_0 \neq 0$) i k liczbą cyfr. Wtedy $10\underline{n} = 4n$, więc (na mocy 2.6.1) $n_0(10^k - 1) + n = 4n$, czyli $n_0(10^k - 1) = 3n$, tzn. $n = n_0(33\dots 33)$ i mamy sprzeczność z ostatnią cyfrą. ⊠

2.6.29. *Nie istnieje $n \in \mathbb{N}$ takie, że $5\underline{n} = 3n$.*

D. Przypuśćmy, że takie n istnieje. Niech n_0 będzie jego ostatnią cyfrą (oczywiście $n_0 \neq 0$) i k liczbą cyfr. Wtedy $10\underline{n} = 6n$, więc (na mocy 2.6.1) $n_0(10^k - 1) + n = 6n$, czyli $n_0(10^k - 1) = 5n$. Stąd jedynie $n_0 = 5$, czyli $n = 10^k - 1 = 99\dots 99$; sprzeczność z ostatnią cyfrą. ⊠

2.6.30. *Istotne rozwiązania naturalne równania $5\underline{n} = bn$ dla pewnych b.*

(1) $b = 4$, $n = 714285$;

(2) $b = 6$, $n = 45$;

(3) $b = 7$, $n = 384615$;

(4) $b = 9$, 2941176470588235 (16-*cyfr*);

(5) $b = 11$, $n = 238095$;

(6) $b = 12$, $n = 2173913043478260869565$ (22-*cyfry*);

(7) $b = 14$, $n = 185$;

(8) $b = 16$, $n = 161290322580645$ (15-*cyfr*);

(9) $b = 17$, $n = 15$;

(10) $b = 19$, $n = 135$;

(11) $b = 21$, $n = 12195$.

(12) *Równanie $5\underline{n} = bn$, gdzie* $\text{nwd}(5, b) = 1$, *posiada naturalne rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy b jest jedną z liczb:* $4, 6, 7, 9, 11, 12, 14, 16, 17, 19, 21, 22, 24$.

(13) *Najmniejsze rozwiązanie dla $b = 24$ ma 46 cyfr.* (Maple).

2.6.31. *Istotne rozwiązania naturalne równania $6\underline{n} = bn$ dla pewnych b.*

(1) $b = 5$, $n = 54$;

(2) $b = 11$, $n = 461538$;

(3) $b = 17$, $n = 14634$, 29268;

(4) $b = 37$, 131868;

(5) $b = 41$, $n = 1188$.

(6) *Równanie $6\underline{n} = bn$, gdzie* $\text{nwd}(6, b) = 1$, *posiada naturalne rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy b jest jedną z liczb:* $5, 11, 13, 17, 19, 25, 29, 35, 37, 41, 43$.

(7) *Najmniejsze rozwiązanie dla $b = 25$ ma 60 cyfr.* (Maple).

2.6.32. *Istotne rozwiązania naturalne równania $7\underline{n} = bn$ dla pewnych b.*

(1) $b = 2$, $n = 538461$;

(2) $b = 4$, $n = 21$, 42, 63, 84;

(3) $b = 8$, $n = 19178082$, 28767123, 38356164, 47945205, 57534246, 67123287,

76712328, 86301369*;*

(4) $b = 13$*,* $n = 11382$, 17073, 22764, 28455, 34146, 39837, 45528, 51219*;*

(5) $b = 15$*,* $n = 146853$, 195804, 244755, 293706, 342657, 391608, 440559*;*

(6) $b = 25$*,* $n = 259$*;*

(7) $b = 31$*,* $n = 1155$, 1386, 1617, 1848, 2079*;*

(8) $b = 34$*,* $n = 105$, 126, 147, 168, 189.

(9) *Równanie* $7\underline{n} = bn$*, gdzie* $\text{nwd}(7, b) = 1$*, posiada naturalne rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy* $2 \leqslant b \leqslant 62$.

(10) *Liczby cyfr najmniejszych rozwiązań równania* $7\underline{n} = bn$ *dla pewnych* b *(w nawiasach podano liczbę cyfr):* 12(112), 20(192), 23(222), 24(232), 27(262), 29(141), 30(146), 32(312), 33(144), 38(186), 39(382), 40(130), 44(432), 45(221), 47(154), 51(502), 53(261), 55(180), 57(281), 60(592). (Maple).

2.6.33. *Nie istnieje* $n \in \mathbb{N}$ *takie, że* $8\underline{n} = n$.

D. Przypuśćmy, że takie n istnieje. Niech n_0 będzie jego ostatnią cyfrą (oczywiście $n_0 \neq 0$) i k liczbą cyfr. Wtedy $40\underline{n} = 5n$, więc (na mocy 2.6.1) $4(n_0(10^k - 1) + n) = 5n$, czyli $n = 4n_0(10^k - 1)$. To jest sprzecznością, gdyż liczba $4n_0(10^k - 1)$ ma więcej niż k cyfr. ⊠

2.6.34. *Istotne rozwiązania naturalne równania* $8\underline{n} = bn$ *dla pewnych* b.

(1) $b = 3$*,* $n = 72$*;*

(2) $b = 5$*,* $n = 380952$, 761904*;*

(3) $b = 9$*,* $n = 19512$, 39024, 58536, 78048*;*

(4) $b = 17$*,* $n = 296$*;*

(5) $b = 19$*,* $n = 175824$, 263736, 351648*;*

(6) $b = 21$*,* $n = 1584$, 2376, 3168*;*

(7) $b = 23$*,* $n = 144$, 216, 288*;*

(8) $b = 47$*,* $n = 103896$, 138528*;*

(9) $b = 55$*,* $n = 11808$.

(10) *Najmniejsze rozwiązanie równania* $8\underline{n} = 37n$ *ma* 180 *cyfr.* (Maple).

2.6.35. *Istotne rozwiązania naturalne równania* $9\underline{n} = bn$ *dla pewnych* b.

(1) $b = 2$*,* $n = 81$*;*

(2) $b = 5$*,* $n = 21951$, 43902, 65853, 87804*;*

(3) $b = 10$*,* $n = 197802$, 296703, 395604, 494505, 593406, 692307, 791208, 890109*;*

(4) $b = 11$*,* $n = 1782$, 2673, 3564, 4455, 5346, 6237, 7128, 8019*;*

(5) $b = 28$*,* $n = 13284$, 16605, 19926, 23247, 26568, 29889*;*

(6) $b = 49$*,* $n = 112266$, 130977, 149688, 168399*;*

(7) $b = 52$*,* $n = 12328767$.

(8) *Liczby cyfr najmniejszych rozwiązań równania* $9\underline{n} = bn$ *dla pewnych* b *(w nawiasach podano liczbę cyfr):* 7(60), 14(130), 19(180), 32(155), 34(110), 37(342), 40(176), 41(200), 43(140), 44(215), 47(460), 50(490), 55(540), 56(252), 58(570), 61(300), 64(315), 67(220), 70(230), 71(700), 74(336), 77(380), 80(336). (Maple).

2.6.36. *W nawiasach okrągłych podano liczbę cyfr najmniejszych rozwiązań równania* $a\underline{n} = bn$ *dla pewnych par* $[a, b]$.

$[11,51](498), [11,52](508), [11,54](506), [11,63](618), [11,67](658), [11,72](708),$

$[13,66](646), [13,74](726), [13,87](856), [13,90](886), [13,95](936), [13,99](976),$
$[13,110](1086), [13,111](1096),$

$[17,76](742), [17,84](822), [17,88](862), [17,97](952),$
$[17,100](982), [17,105](1032), [17,108](1062), [17,112](1102), [17,117](1152),$
$[17,121](1192), [17,124](1222), [17,132](1302), [17,145](1432), [17,147](726),$

$[19,72](700), [19,83](810), [19,84](820), [19,96](940), [19,99](970),$
$[19,104](1020), [19,107](1050), [19,111](1090), [19,119](1170), [19,120](1180),$
$[19,131](1290), [19,132](1300), [19,140](1380), [19,155](1530), [19,159](1570), [19,164](1620).$

2.6.37. *Z liczby naturalnej* a *tworzymy liczbę* $d(a)$ *w następujący sposób.*

(1) *Ostatnią cyfrę liczby* a *przenosimy na początek. Otrzymujemy liczbę* b.

(2) $c = b^2$.

(3) *Pierwszą cyfrę liczby* c *przenosimy na koniec i mamy liczbę* $d(a)$.

Znaleźć wszystkie liczby naturalne a *takie, że* $d(a) = a^2$. ([IMO] Shortlist 2003).

O. $a = 3$ lub $a = 2$, lub $a = 22\dots21$. ⊠

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

2.7 Przestawienia cykliczne i podzielność

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

Przypomnijmy, że przez $\widehat{n}$ oznaczamy liczbę otrzymaną z liczby n przez przestawienie jej pierwszej cyfry na koniec, natomiast przez $\underline{n}$ oznaczamy liczbę otrzymaną z liczby n przez przestawienie jej ostatniej cyfry na początek.

2.7.1. *Jeśli* n *jest liczbą trzycyfrową podzielną przez* 37, *to liczba* $\widehat{n}$ *również jest podzielna przez* 37.

D. $\overline{bca} = 10\overline{abc} + a - 1000a = \overline{abc} - 999a$ oraz $37 \mid 999$. ⊠

2.7.2. *Jeśli* n *jest liczbą pięciocyfrową podzielną przez* 41, *to liczba* $\widehat{n}$ *również jest podzielna przez* 41. ([Mat] 5/1950 41, [Fom] 20/63 14/78).

D. $\overline{bcdea} = 10\overline{abcde} + a - 100000a = \overline{abcde} - 99999a$ oraz $41 \mid 99999$. Uwaga. Uogólninienia tego typu zadań (tzn. tego zadania i zadania 2.7.1) znajdziemy w artykule E. Białoborskiego *O liczbach kolistych*, [Wm] 4(1960) 91-92. ⊠

2.7.3. *Niech* n *będzie liczbą sześciocyfrową. Jeśli* $7 \mid n$, *to* $7 \mid \underline{n}$. ([KoM] 2005 C795).

2.7.4. *Niech* n *będzie liczbą dziesięciocyfrową. Jeśli* $41 \mid n$, *to* $41 \mid \underline{n}$. ([Ko02]).

2.7.5. *Jeśli* $333 \mid n$, *to* $333 \mid \underline{n}$. ([OM] Polska 2002/2003).

2.7.6. *Znaleźć najmniejszą liczbę naturalną podzielną przez* 17 *i taką, że wszystkie liczby powstające przez cykliczne przestawienie jej cyfr są podzielne przez* 17*.* Odp. *Najmniejszą taką liczbą jest* 16*-cyfrowa liczba postaci* $100\dots005$. ([Dlt] 2/1983).

2.7.7. *Na okręgu jest* 1953 *cyfr. Wiadomo, że jeśli te cyfry odczytamy w kierunku ruchu wskazówek zegara poczynając od jakiejś określonej, to otrzymamy liczbę o* 1953 *cyfrach, podzielną przez* 27*. Dowieść, że gdybyśmy te same cyfry odczytali (też w kierunku ruchu wskazówek zegara) poczynając od innego miejsca, to otrzymamy również liczbę podzielną przez* 27*.* ([OM] Moskwa 1953, [Mat] 6/1954 50).

★ Sz. Jeleński, *Tajemnice liczb kolistych*, [Je88], 106-109.
S. Guttman, *On cyclic numbers*, [Mon] 3/1934 159-166.

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

2.8 Permutacje cyfr

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

2.8.1. *W rozwinięciu dziesiętnym pewnej liczby naturalnej występują cyfry* $1, 3, 7$ *i* 9*. Udowodnić, że przez permutację cyfr tego rozwinięcia można otrzymać rozwinięcie dziesiętne liczby podzielnej przez* 7*.* ([Br83] 1).

D. Przez odpowiednią permutację przenosimy cyfry $1, 3, 7, 9$ na koniec. Otrzymamy wtedy liczbę postaci $10000n + 1379$, gdzie $n \geqslant 0$. Permutując cyfry liczby 1379 otrzymamy między innymi liczby 1379, 1793, 3719, 1739, 1397, 1937, 1973, które przy dzieleniu przez 7 dają reszty równe odpowiednio $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$. ⊠

2.8.2. *Pierwsze cztery cyfry liczby naturalnej* n *to* $1, 1, 3, 7$*. Udowodnić, że przez permutację cyfr liczby* n *można otrzymać liczbę podzielną przez* 7*.* ([OM] RPA 2003).

D. Przez odpowiednią permutację przenosimy cyfry $1, 1, 3, 7$ na koniec. Otrzymamy wtedy liczbę postaci $10000a + 1137$, gdzie $a \geqslant 0$. Reszty z dzielenia przez 7 liczb 3171, 1317, 1731, 1137, 1173, 1713 i 1371 są odpowiednio równe $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$. Wśród tych siedmiu liczb istnieje więc taka liczba b, że liczba $10000a + b$ jest podzielna przez 7. ⊠

2.8.3. *Liczbę* y *otrzymano permutując cyfry danej liczby naturalnej* x*. Wiadomo, że* $x + y = 10^{200}$*. Wykazać, że* $50 \mid x$*.* ([GaT] 26/67).

2.8.4. *Liczbę* y *otrzymano permutując cyfry danej liczby naturalnej* x*. Wiadomo, że* $x + y = 10^{10}$*. Wykazać, że* $10 \mid x$*.* ([Ko02]).

2.8.5. *Z cyfr* $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ *utworzono wszystkie możliwe liczby siedmiocyfrowe, w których nie występują dwie jednakowe cyfry. Wykazać, że suma wszystkich takich liczb jest podzielna przez* 9*.* ([GaT] 24/63).

2.8.6. *Z cyfr* $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ *utworzono wszystkie możliwe liczby siedmiocyfrowe, w których nie występują dwie jednakowe cyfry. Wykazać, że wśród tych liczb nie ma dwóch takich, z których jedna dzieli drugą.* ([DyM] 77).

2.8.7. *Permutując cyfry danej liczby* a *otrzymano liczbę* b *równą* $3a$*. Wykazać, że* $27 \mid b$*.* ([Pa02] 59).

D. Ponieważ $s(a) = s(b)$ i $b = 3a$, więc $3 \mid b$ i stąd $3 \mid s(b) = s(a)$, czyli $3 \mid a$. Zatem $b = 3a$ jest podzielne przez 9. Stąd $s(a) = s(b)$ jest podzielne przez 9, czyli a jest podzielne przez 9 i mamy: $27 \mid b$. ⊠

2.8.8. *Mamy dziesięć żetonów z numerami* $1, 2, \dots, 9, 10$*. Rozpatrzmy wszystkie możliwe liczby jedenastocyfrowe utworzone z wszystkich żetonów. Wykazać, że jeśli* $a \neq b$ *są liczbami tej postaci, to* $a \nmid b$ *i* $b \nmid a$*.* ([Mat] 6/1970 374).

2.8.9. *Naturalną liczbę można pomnożyć przez* 2 *lub dokonać permutacji jej cyfr. Wykazać, że przy pomocy takich operacji, powtarzanych kilka razy, nie można startując od liczby* 1 *otrzymać żadnej z liczb: 74, 78, 411, 811.* ([OM] St Petersburg 1995).

2.8.10. *Znaleźć sumę wszystkich liczb utworzonych z cyfr liczby* 12345*.* Odp. 4 420 575. ([Mat] 4/1951 63).

2.8.11. *Znaleźć sumę wszystkich liczb pięciocyfrowych utworzonych ze wszystkich permutacji cyfr liczby* 12345*.* Odp. $360 \cdot 11111$. ([Mat] 4/1951 63).

2.8.12. *Z cyfr* $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ *utworzono wszystkie możliwe liczby czterocyfrowe o cyfrach różnych. Znaleźć sumę tych liczb.* Odp. 16798320. ([Str67] 12).

2.8.13. *Z cyfr liczby czterocyfrowej* N *tworzymy dwie liczby* M *i* m*; największą i najmniejszą spośród wszystkich możliwych. Obliczamy różnicę* $N_1 = M - m$ *i z liczbą* N_1 *postępujemy tak samo, jak z liczbą* N*. Wykazać, że powtarzając tę operację kilka razy zawsze dojdziemy do liczby* 6174*.*

Do jakiego wyniku doprowadzi nas analogiczne postępowanie dla liczb trzycyfrowych lub pięciocyfrowych? ([Mat] 1/1960 60).

O. Postępowanie takie dla liczb trzycyfrowych doprowadzi nas zawsze do liczby 495. Wśród liczb pięciocyfrowych mogą istnieć cykle, na przykład: 74943, 62964, 71973, 83952, 74943. ⊠

---

3 Suma cyfr

Jeśli n jest liczbą naturalną, to przez $s(n)$ oznaczamy sumę jej cyfr. Przykłady:

$$s(1234) = 10, \quad s(25571) = 20, \quad s(20082009) = 21.$$

3.1 Przykłady i własności

3.1.1. *Dla każdej liczby naturalnej n zachodzi równość*

$$s(n) = n - 9\Big(\left[\tfrac{n}{10^1}\right] + \left[\tfrac{n}{10^2}\right] + \left[\tfrac{n}{10^3}\right] + \cdots \Big).$$

([Miss] z.23).

D. Niech $n = a_m 10^m + a_{m-1}10^{m-1} + \cdots + a_1 10^1 + a_0$, gdzie $a_0, \dots, a_m$ są cyframi. Wtedy:

$$\begin{aligned}
\left[\tfrac{n}{10^1}\right] &= a_m 10^{m-1} + a_{m-1}10^{m-2} + \cdots + a_3 10^2 + a_2 10^1 + a_1, \\
\left[\tfrac{n}{10^2}\right] &= a_m 10^{m-2} + a_{m-1}10^{m-3} + \cdots + a_3 10^1 + a_2, \\
&\vdots \\
\left[\tfrac{n}{10^m}\right] &= a_m.
\end{aligned}$$

Dodajemy te równości stronami i otrzymujemy:

$$\begin{aligned}
\textstyle\sum_{i\geqslant 1} \left[\tfrac{n}{10^i}\right] &= a_m \left(10^{m-1} + 10^{m-2} + \cdots + 1\right) + a_{m-1}\left(10^{m-2} + \cdots + 1\right) + \cdots + a_2(10^1 + 1) + a_1 \\
&= a_m \tfrac{10^m - 1}{10-1} + a_{m-1}\tfrac{10^{m-1}-1}{10-1} + \cdots + a_2 \tfrac{10^2-1}{10-1} + a_1 \tfrac{10^1 - 1}{10-1} \\
&= \tfrac{1}{9}\Big(\big(a_m 10^m + a_{m-1}10^{m-1} + \cdots + a_1 10 + a_0\big) - (a_m + a_{m-1} + \cdots + a_1 + a_0) \Big) \\
&= \tfrac{1}{9}\left(n - s(n)\right).
\end{aligned}$$

Zatem $n - s(n) = 9\sum_{i\geqslant 1}\left[\frac{n}{10^i}\right]$ i stąd otrzymujemy tezę. ⊠

3.1.2. $\sum\limits_{k=0}^{10^n - 1} s(k) = 45n10^{n-1}$. ([AuP] 2005, [SPom] 55 s.140).

3.1.3. *Niech $a = 9 \cdot 99 \cdot 999 \cdot \cdots \cdot \underbrace{99\dots9}_{2^{2002}}$. Liczba a ma $2^{2003} - 1$ cyfr oraz $s(a) = 9 \cdot 2^{2002}$.*

([Kw] 2/2003 s.54, 63).

3.1.4. *Niech $a = 9 + 99 + 999 + \cdots + \underbrace{99\dots9}_{99}$. Wtedy $s(a) = 99$.* ([Uiuc] 2003).

3.1.5. *Liczba b powstała z liczby naturalnej a przez permutację cyfr. Wykazać, że:*

(1) $s(2a) = s(2b)$,

(2) $s(a/2) = s(b/2)$ (*gdy liczby a, b są parzyste*),

(3) $s(5a) = s(5b)$. ([TTss] 1983, [Kw] 11/1983 39).

3.1.6. *Niech a będzie liczbą naturalną i niech $s(a) = n$. Istnieje wtedy liczba naturalna b taka, że $a < b < 10a$ oraz $s(b) = n + 5$.* ([OM] Rosja 1997/1998).

D. Niech p będzie ostatnią cyfrą liczby a. Jeśli $p < 5$, to liczba $b = a + 5$ spełnia tezę. Jeśli $p \geqslant 5$, to liczba $b = 10a - 4$ spełnia tezę. ⊠

3.1.7. *Niech $a < b$ będą liczbami naturalnymi takimi, że $s(b) = 100 + s(a)$. Istnieje wtedy liczba naturalna c taka, że $a < c < b$ oraz $s(c) = 43 + s(a)$.* ([OM] Rosja 1997/1998).

3.1.8. *Opisać wszystkie liczby naturalne n takie, że $s(2n) = 2s(n)$.*

3.1.9. *Dla każdej liczby naturalnej n istnieje liczba pierwsza p taka, że $s(p) > n$.* ([S64] 99).

W. Wykorzystać twierdzenie Dirichleta o liczbach pierwszych w postępie arytmetycznym. ⊠

3.1.10. *Dla każdej liczby naturalnej n istnieje liczba złożona m, która jest względnie pierwsza z 10 i spełnia równość $s(m) = n$.* ([OM] ZSRR 1979).

3.1.11. *Nie istnieje 19 parami różnych liczb naturalnych posiadających tę samą sumę cyfr, których suma jest równa 1999.* ([OM] Rosja 1999).

3.1.12. *Najmniejszą liczbą naturalną n taką, że $sss(n) = 10$ jest $n = 1\underbrace{99\ldots9}_{22}$.* ([Jedr] B.59).

3.1.13. *Znaleźć najmniejszą liczbę naturalną n taką, że $11 \mid n$ oraz $s(n) = 13$.* Odp. $n = 319$. ([OM] Leningrad 1991).

3.1.14. *Niech $a_n = 3n^2 + n + 1$.*

(1) *Znaleźć najmniejszą liczbę postaci $s(a_n)$.* Odp. $s(a_8) = s(201) = 3$.

(2) *Znaleźć n takie, że $s(a_n) = 1999$.* Odp. $n = 10^{222} - 1$. ([OM] Anglia 1999).

3.1.15. *Jeśli n jest dwucyfrową liczbą naturalną, to $s(109 - n) = 19 - s(n)$.*

D. Niech $n = 10a+b$, $1 \leqslant a \leqslant 9$, $0 \leqslant b \leqslant 9$. Wtedy $109-n = 109-(10a+b) = 10(10-a)+(9-b)$ oraz $1 \leqslant 10 - a \leqslant 9$, $0 \leqslant 9 - b \leqslant 9$. Liczba $109 - n$ jest dwucyfrowa. Mamy więc: $s(109 - n) = (10 - a) + (9 - b) = 19 - (a + b) = 19 - s(n)$. ⊠

3.1.16. *Jeśli n jest trzycyfrową liczbą naturalną, to $s(1099 - n) = 28 - s(n)$.*

Powyższe fakty są szczególnymi przypadkami następującego stwierdzenia.

3.1.17. *Jeśli n jest k-cyfrową liczbą naturalną, gdzie $k \geqslant 2$, to*

$$s\Big((10^k + 10^{k-1} - 1) - n\Big) = (9k+1) - s(n).$$

D. Niech n będzie k-cyfrową liczbą naturalną. Liczba ta jest postaci

$$n = a_0 + 10a_1 + 10^2 a_2 + \cdots + a_{k-1}10^{k-1},$$

gdzie $a_0, a_1, \dots, a_{k-2} \in \{0, 1, \dots, 9\}$, $a_{k-1} \in \{1, 2, \dots, 9\}$. Zachodzi równość

$$\big(10^k + 10^{k-1} - 1\big) - n = (9 - a_0) + 10^1(9 - a_1) + \cdots + 10^{k-2}(9 - a_{k-2}) + 10^{k-1}(10 - a_{k-1}),$$

z której wynika, że $s\big((10^k + 10^{k-1} - 1) - n\big) = (10 - a_{k-1}) + (9 - a_{k-2}) + \cdots + (9 - a_1) + (9 - a_0) = (9k+1) - (a_{k_1} + a_{k-2} + \cdots + a_0) = (9k+1) - s(n)$. ⊠

3.1.18. *Niech $n > 1$, $n \neq 10$. Istnieje dokładnie jedna liczba naturalna a taka, że*

$$s(k) + s(a-k) = n$$

dla wszystkich $1 \leqslant k < a$. ([OM] Szwecja 1997).

D. Niech $n = 9q + r$, gdzie $q \geqslant 0$ i $0 \leqslant r < 9$. Wtedy liczba $a = r99\dots9$ (q dziewiątek) ma żądaną własność. ⊠

★ E. Goodstein, *On sums of digits*, [MG] 25(265)(1941) 156-159.

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

3.2 Suma cyfr i liczby potęgowe

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

3.2.1. *Niech $a = 4444^{4444}$. Znaleźć $sss(a)$.* Odp. 7. ([IMO] 1975, [Br83] 2).

3.2.2. *Oznaczmy: $a_n = n \cdot 1111$, $b_n = a_n^{a_n}$, $c_n = sss(b_n)$. Mamy wtedy: $c_1 = 4$, $c_2 = 10$, $c_3 = 9$, $c_4 = 7$, $c_5 = 5$, $c_6 = 9$, $c_7 = 10$, $c_8 = 7$, $c_9 = 9$.* (Maple).

3.2.3. *Niech $a = 11111^{11111}$. Wtedy $sss(a) = 2$.* (Maple).

3.2.4. *Niech $a = 1989^{1989}$. Znaleźć $sssss(a)$.* Odp. 9. ([OM] Kanada 1989, [Crux] 1989 s.198).

3.2.5. *Dla każdego $n \in \mathbb{N}$, liczba $s(4^n) + s(25^n)$ jest nieparzysta.* ([OM] Austria 1999).

3.2.6. *Jeśli $s(5^n) = 2^n$, to $n = 3$.* ([OM] Rosja 1992, [Pa97]).

3.2.7. $s(54^6) = 54$, $s(54^8) = 54$, $s(54^9) = 54$, $s(54^7) \neq 54$, $s(53^7) = 53$. ([Dlt] 6/1980, [Szu87] 60).

3.2.8. $s(37^n) \neq 37$ *dla* $n \in \mathbb{N}$. ([Szu87] 61).

3.2.9. $s(37^{12}) = 73$. ([Szu87] 61).

3.2.10. *Jeżeli a jest liczbą naturalną parzystą niepodzielną przez* 5, *to* $\lim s(a^n) = \infty$.
([Mat] 4/1964 191, [S64] s.160, [Br80] 33, [B-rs] 238).

3.2.11. *Jeżeli b jest liczbą naturalną nieparzystą podzielną przez* 5, *to* $\lim s(b^n) = \infty$.
([Br80] 34).

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

3.3 Nierówności z sumą cyfr

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

3.3.1. *Dla dowolnych liczb naturalnych n, m zachodzi nierówność*

$$s(n+m) \leqslant s(n) + s(m).$$

([Kw] 5/1972 31, [GaT] s.236, [ME] 7(4)(2002) z.157).

D. Korzystamy z równości podanej w 3.1.1:

$$\begin{aligned} s(n)+s(m)-s(n+m) &= n - 9\sum_{i\geqslant 1}\left[\tfrac{n}{10^i}\right] + m - 9\sum_{i\geqslant 1}\left[\tfrac{m}{10^i}\right] - (n+m) + 9\sum_{i\geqslant 1}\left[\tfrac{n+m}{10^i}\right] \\ &= 9\Big(\sum_{i\geqslant 1}\left[\tfrac{n+m}{10^i}\right] - \sum_{i\geqslant 1}\left[\tfrac{n}{10^i}\right] - \sum_{i\geqslant 1}\left[\tfrac{m}{10^i}\right]\Big) \\ &= 9\sum_{i\geqslant 1}\Big(\left[\tfrac{n}{10^i} + \tfrac{m}{10^i}\right] - \left[\tfrac{n}{10^i}\right] - \left[\tfrac{m}{10^i}\right]\Big). \end{aligned}$$

Dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y zachodzi oczywista nierówność $[x+y] \geqslant [x] + [y]$. Każda więc liczba $\left[\frac{n}{10^i} + \frac{m}{10^i}\right] - \left[\frac{n}{10^i}\right] - \left[\frac{m}{10^i}\right]$ jest nieujemna. Zatem $s(n)+s(m)-s(n+m) \geqslant 0$. ⊠

3.3.2. *Dla dowolnych liczb naturalnych n, m zachodzi nierówność*

$$s(nm) \leqslant s(n)s(m).$$

([Kw] 5/1972 31, [GaT] s.236).

D. Sprawdzamy najpierw, że jeśli a, b są cyframi, to $s(ab) \leqslant ab$. Następnie, wykorzystując nierówność 3.3.1 oraz fakt, że $s(10^k n) = s(n)$ dla $k, n \in \mathbb{N}$, wykazujemy to jak następuje. Niech $n = \sum a_i 10^i$, $m = \sum b_j 10^j$, gdzie a_i, b_j są cyframi. Wtedy $nm = \left(\sum a_i 10^i\right)\left(\sum b_j 10^j\right) = \sum\sum a_i b_j 10^{i+j}$ i na mocy 3.3.1 otrzymujemy:

$$s(nm) \leqslant \sum\sum s(a_i b_j 10^{i+j}) = \sum\sum s(a_i b_j) \leqslant \sum\sum a_i b_j = \left(\sum a_i\right)\left(\sum b_j\right) = s(n)s(m),$$

czyli $s(nm) \leqslant s(n)s(m)$. ⊠

3.3.3. $s(n^2) \leqslant s(n)^2$ *dla* $n \in \mathbb{N}$. ([OM] Rosja 1996, wynika z 3.3.2).

3.3.4. *Dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzą nierówności*

$$s(2n) \leqslant 2s(n) \leqslant 10s(2n).$$

([OM] Irlandia 1996).

D. Wykorzystujemy poprzednie nierówności. Z 3.3.1 mamy: $s(2n) = s(n+n) \leqslant s(n) + s(n) = 2s(n)$. Natomiast z 3.3.2: $2s(n) = 2s(10n) = 2s(5 \cdot 2n) \leqslant 2s(5)s(2n) = 10s(2n)$. ⊠

3.3.5. $s(11n+7) \neq s(2n+5)$. ([Andz] 256).

3.3.6. $s(n(n-1)) \neq s((n+1)^2)$. ([OM] St Petersburg 1992, [Fom] 3/92).

3.3.7. $s(1981^n) \geqslant 19$. ([Kw] 12/1981 26).

3.3.8. *Jeśli* $41 \mid n$, *to* $s(n) \geqslant 5$. ([Miss] 1994(3) z.74).

3.3.9. *Jeśli* n *jest* 6*-cyfrową liczbą podzielną przez* 8*, to* $s(n) \leqslant 51$. ([Ko02]).

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

3.4 Ciąg s(n)/s(kn)

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

3.4.1. *Dla każdej liczby naturalnej* n *zachodzą następujące nierówności.*

(1) $\frac{s(n)}{s(2n)} \leqslant 5$, ([AnAF] 83).

(2) $\frac{s(n)}{s(4n)} \leqslant 7$, ([M-sj] 553).

(3) $\frac{s(n)}{s(5n)} \leqslant 2$.

(4) $\frac{s(n)}{s(8n)} \leqslant 8$, ([Kw] 5/1972 31, [GaT] 23/71, [Dlt] 11/1984 4).

(5) $\frac{s(n)}{s(16n)} \leqslant 13$.

(6) $\frac{s(n)}{s(25n)} \leqslant 4$.

(7) $\frac{s(n)}{s(5^5n)} \leqslant 5$, ([Kw] 5/1972 31, [GaT] 35/71).

D. Wykorzystujemy równość $s(10^m n) = s(n)$ i nierówność 3.3.2.

(1) $s(n) = s(10n) = s(5\cdot 2n) \leqslant s(5)s(2n) = 5s(2n)$.

(2) $s(n) = s(100n) = s(25\cdot 4n) \leqslant s(25)s(4n) = 7s(2n)$.

(3) $s(n) = s(10n) = s(2\cdot 5n) \leqslant s(2)s(5n) = 2s(5n)$.

(4) $s(n) = s(1000n) = s(125\cdot 8n) \leqslant s(125)s(8n) = 8s(8n)$.

(5) $s(n) = s(10000n) = s(625\cdot 16n) \leqslant s(625)s(16n) = 13s(16n)$.

(6) $s(n) = s(100n) = s(4\cdot 25n) \leqslant s(4)s(25n) = 4s(25n)$.

(7) $s(n) = s(10^5n) = s(2^5\cdot 5^5n) \leqslant s(32)s(5^5n) = 5s(5^5n)$. ⊠

3.4.2. *Ciąg* $\left(\frac{s(n)}{s(3n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *jest nieograniczony.* ([AnAF] 83).

D. ([AnAF] 132). Rozpatrzmy liczby

$$a_n = \underbrace{33\dots3}_{n}4, \quad b_n = 1\underbrace{00\cdots0}_{n}2$$

i zauważmy, że $b_n = 3a_n$. Ponieważ $s(a_n) = 3n+4$, $s(b_n) = 3$, więc $\frac{s(a_n)}{s(3a_n)} = \frac{s(a_n)}{s(b_n)} = \frac{3n+4}{3} = n + \frac{4}{3}$. ⊠

3.4.3. *Następujące ciągi:* $\left(\frac{s(n)}{s(6n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, $\left(\frac{s(n)}{s(7n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, $\left(\frac{s(n)}{s(11n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *są nieograniczone*

D. Wynika to odpowiednio z równości: $166\ldots667 \cdot 6 = 100\ldots002$, $142857\ldots142857\,143 \cdot 7 = 100\ldots001$, $9090\ldots906091 \cdot 11 = 100\ldots001$. ⊠

Przypomnijmy, że $s(2n) \leqslant 2s(n) \leqslant 10s(2n)$ (patrz 3.3.4). Jest ponadto oczywiste, że

$$s(n) = s(10n).$$

Mamy zatem następujące nierówności zachodzące dla każdej liczby naturalnej n.

3.4.4. $\frac{1}{2} \leqslant \frac{s(n)}{s(2n)} \leqslant 5$, $\frac{1}{5} \leqslant \frac{s(2n)}{s(n)} \leqslant 2$.

3.4.5. $\frac{1}{5} \leqslant \frac{s(n)}{s(5n)} \leqslant 2$, $\frac{1}{2} \leqslant \frac{s(5n)}{s(n)} \leqslant 5$.

Oznaczmy przez B zbiór tych wszystkich liczb naturalnych k, dla których ciąg

$$\left(\frac{s(n)}{s(kn)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

jest ograniczony. Oczywiście $1 \in B$. Z powyższych faktów wynika, że liczby $2, 4, 5, 8, 16, 25$ i 5^5 należą do zbioru B. Natomiast liczby $3, 6, 7, 11$ do niego nie należą. Podamy dokładny opis wszystkich liczb należących do B. W tym celu udowodnimy najpierw dwa lematy.

3.4.6. $k \in B \iff 2k \in B$.

D. Z nierówności podanych w 3.4.4 wynika, że dla dowolnych liczb naturalnych n i k mamy:

$$\frac{s(n)}{s(kn)} = \frac{s(2(kn))}{s(kn)} \cdot \frac{s(n)}{s((2k)n)} \leqslant 2\frac{s(n)}{s((2k)n)}, \qquad \frac{s(n)}{s((2k)n)} = \frac{s(kn)}{s((2k)n)} \cdot \frac{s(n)}{s(kn)} \leqslant 5\frac{s(n)}{s(kn)}.$$

Niech $k \in B$. Istnieje wtedy liczba $u > 0$ taka, że $\frac{s(n)}{s(kn)} \leqslant u$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$. Wtedy dla każdej liczby naturalnej n zachodzi nierówność $\frac{s(n)}{s((2k)n)} \leqslant 5u$; zatem $2k \in B$. Jeśli natomiast $2k \in B$ oraz $\frac{s(n)}{s((2k)n)} \leqslant v$ dla $v > 0$, $n \in \mathbb{N}$, to $\frac{s(n)}{s(kn)} \leqslant 2v$, więc $k \in B$. ⊠

3.4.7. $k \in B \iff 5k \in B$.

D. Z nierówności podanych w 3.4.5 wynika, że dla dowolnych liczb naturalnych n i k mamy:

$$\frac{s(n)}{s(kn)} = \frac{s(5(kn))}{s(kn)} \cdot \frac{s(n)}{s((5k)n)} \leqslant 5\frac{s(n)}{s((5k)n)}, \qquad \frac{s(n)}{s((5k)n)} = \frac{s(kn)}{s(5(kn))} \cdot \frac{s(n)}{s(kn)} \leqslant 2\frac{s(n)}{s(kn)}.$$

Niech $k \in B$. Istnieje wtedy liczba $u > 0$ taka, że $\frac{s(n)}{s(kn)} \leqslant u$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$. Wtedy dla każdej liczby naturalnej n zachodzi nierówność $\frac{s(n)}{s((5k)n)} \leqslant 2u$; zatem $5k \in B$. Jeśli natomiast $5k \in B$ oraz $\frac{s(n)}{s((5k)n)} \leqslant v$ dla $v > 0$, $n \in \mathbb{N}$, to $\frac{s(n)}{s(kn)} \leqslant 5v$, więc $k \in B$. ⊠

Z tych dwóch lematów wynika następujące stwierdzenie.

3.4.8. *Niech* $k = 2^\alpha 5^\beta a$, *gdzie* $a \in \mathbb{N}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0$. *Wtedy:*

$$k \in B \iff a \in B.$$

W szczególności, każda liczba naturalna postaci $2^\alpha 5^\beta$ *należy do zbioru* B.

Teraz możemy udowodnić następujące główne twierdzenie tego podrozdziału.

3.4.9. *Dla danej liczby naturalnej k następujące dwa warunki są równoważne.*

(1) *Ciąg* $\left(\frac{s(n)}{s(kn)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *jest ograniczony.*

(2) *Liczba k jest postaci $2^\alpha 5^\beta$, gdzie $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0$.* ([OM] Rosja 1999).

D. (P. Bornsztein, [Crux] 2004 s.32-33). Implikację (2) $\Rightarrow$ (1) już wykazaliśmy (patrz 3.4.8). Wystarczy zatem udowodnić, że jeśli $\mathrm{nwd}(k,10) = 1$ i $k \geqslant 2$, to ciąg $\left(\frac{s(n)}{s(kn)}\right)$ jest nieograniczony. Załóżmy więc, że $k \geqslant 2$ i $\mathrm{nwd}(k,10) = 1$.

Oznaczmy przez a liczbę $\frac{10^{\varphi(k)}-1}{k}$. Z twierdzenia Eulera wiemy, że $10^{\varphi(k)} \equiv 1 \pmod{k}$. Zatem a jest liczbą naturalną. Ponadto, $a+1 < 10^{\varphi(k)}$. Liczba $a+1$ ma więc co najwyżej $\varphi(k)$ cyfr.

Niech q będzie dowolną liczbą naturalną taką, że $10^{q\varphi(k)} > k-1$. Oczywiście $10^{q\varphi(k)} \equiv 1 \pmod{k}$. Mamy więc następną liczbę naturalną $b_q := \frac{10^{q\varphi(k)}-1}{k}$. Niech $n_q := b_q+1$. Wtedy $10^{q\varphi(k)}+(k-1) = kn_q$. Istnieje więc liczba naturalna n_q taka, że $10^{q\varphi(k)} + (k-1) = kn_q$. Stąd wynika, że

$$s\,(kn_q) = 1 + s(k-1).$$

Ale $n_q = 1 + \frac{10^{q\varphi(k)}-1}{k} = 1 + \frac{10^{\varphi(k)}-1}{k}\left(1 + 10^{\varphi(k)} + 10^{2\varphi(k)} + \cdots + 10^{(q-1)\varphi(k)}\right)$, więc $n_q = 1 + a + a10^{\varphi(k)} + a10^{2\varphi(k)} + \cdots + a10^{(q-1)\varphi(k)}$ i stąd

$$s\,(n_q) = s(1+a) + (q-1)s(a) \geqslant (q-1)s(a).$$

Zatem

$$\frac{s(n_q)}{s(kn_q)} \geqslant \frac{(q-1)s(a)}{s(kn_q)} = (q-1)\frac{s(a)}{1+s(k-1)}.$$

Ponieważ ułamek $\frac{s(a)}{1+s(k-1)}$ nie zależy od q, więc $\frac{s(n_q)}{s(kn_q)} \to +\infty$, gdy $q \to +\infty$. Rozważany ciąg $\left(\frac{s(n)}{s(kn)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ nie jest więc ograniczony. ⊠

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

3.5 Wielokrotności dziewiątki

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

3.5.1. *Niech a będzie liczbą naturalną 1959-cyfrową podzielną przez 9. Znaleźć $sss(a)$.*
Odp. 9. ([WyKM] 299-59).

3.5.2. *Niech a będzie liczbą naturalną 1962-cyfrową podzielną przez 9. Znaleźć $sss(a)$.*
Odp. 9. ([WaJ] 21(62)).

3.5.3. $s(n+m) = s(n) \Rightarrow 9 \mid m$.

D. Ponieważ $9 \mid s(n) - n$, $9 \mid s(n+m) - (n+m)$, więc $9 \mid s(n) - n - (s(n+m) - n - m) = m$. ⊠

3.5.4. *Niech $a, k \in \mathbb{N}$. Jeśli $s(a + 1\cdot 9) = s(a + 2\cdot 9) = \cdots = s(a + k\cdot 9)$, to $k \leqslant 9$.*

D. Jest oczywiste, że jeśli $10 \mid a$, to $s(a+9) = s(a) + 9$. W tym przypadku $k = 1 < 9$. Jeśli $10 \nmid a$, to jedna z liczb $a + 1\cdot 9$, $a + 2\cdot 9$, $\dots$, $a + 9\cdot 9$ jest podzielna przez 10 (gdyż ostatnie cyfry liczb $1\cdot 9$, $2\cdot 9$, $\dots$, $9\cdot 9$ są równe odpowiednio $9, 8, \dots, 1$). Załóżmy, że tą liczbą jest $a + p\cdot 9$. Wtedy $s(a + (p+1)\cdot 9) = s((a + p\cdot 9) + 9) \neq s(a + p\cdot 9)$. Zatem $k \leqslant p \leqslant 9$. ⊠

3.5.5.

(1) 31 *jest najmniejszą liczbą naturalną* n *taką, że* $s(9n) = s(9(n+1)) = s(9(n+2)) = 18$.

(2) 441 *jest najmniejszą liczbą naturalną* n *taką, że* $s(9n) = s(9(n+1)) = s(9(n+2)) = s(9(n+3)) = 27$.

(3) 3331 *jest najmniejszą liczbą naturalną* n *taką, że* $s(9n) = s(9(n+1)) = s(9(n+2)) = 36$. ([Mat] 1/1969 139).

3.5.6. *Niech* $a_n = 19\dots98$, *gdzie cyfra* 9 *występuje* n *razy. Jeśli* $m < 2^n5^{n+1}$, *to* $s(ma_n) = 9(n+1)$. ([Mat] 1/1990 26).

3.5.7. *Ciąg* (x_n) *określony jest następująco:* $x_1 = 1989^{1989}$, $x_{n+1} = s(x_n)$ *dla* $n \in \mathbb{N}$. *Znaleźć* x_5. Odp. 9. ([OM] Kanada 1989, [Pa97]).

Spójrzmy na równości:

$$s(99) = 18,\ s(2\cdot 99) = s(198) = 18,\ s(3\cdot 99) = s(297) = 18,\ s(4\cdot 99) = s(396) = 18.$$

Sumy cyfr liczb $99n$, dla $n = 1, 2, 3, 4$, są jednakowe i wynoszą 18. Wykażemy, że tak jest dla wszystkich n mniejszych lub równych 100.

3.5.8. $s(99n) = 18$ *dla* $1 \leqslant n \leqslant 100$.

D. Załóżmy najpierw, że $n \in \{1, 2, \dots .9\}$ i zauważmy, że $99n = 100n - n = 100(n-1) + 100 - n = 100(n-1) + 10\cdot 9 + (10-n)$. Mamy więc równość $99n = 100(n-1) + 10\cdot 9 + (10-n)$ i z tej równości wynika, że $s(99n) = (n-1) + 9 + 10 - n = 18$.

Załóżmy teraz, że $n \in \{10, 11, \dots, 99\}$. Niech $n = 10a + b$, gdzie $a, b \in \{0, 1, \dots, 9\}$ oraz $a \neq 0$. Jeśli $b = 0$, to $s(99n) = s(99a\cdot 10) = s(99a) = 18$ (na mocy pierwszej części tego dowodu). Możemy więc dalej założyć, że $b \geqslant 1$. Rozpatrzmy równości:

$$\begin{aligned} 99n &= (100-1)(10a+b) = 1000a + 100b - 10a - b \\ &= 1000a + 100(b-1) + (90+10) - 10a - b \\ &= 1000a + 100(b-1) + 10(9-a) + (10-b). \end{aligned}$$

Kolejnymi cyframi liczby $99n$ są więc: $a, (b-1), (9-a)$ oraz $(10-b)$ Zatem $s(99n) = a + (b-1) + (9-a) + (10-b) = 18$. ⊠

Powyższe stwierdzenie jest szczególnym przypadkiem następującego twierdzenia.

3.5.9. *Niech* u *będzie* k*-cyfrową liczbą naturalną, której cyframi są same dziewiątki. Wtedy*

$$s(un) = 9k$$

dla wszystkich n *mniejszych lub równych* 10^k. ([Mon] 43(1)(1936) s.46, [Crux] 2001 s.232).

D. Załóżmy najpierw, że $n \in \{1, 2, \dots .9\}$. W tym przypadku mamy:

$$\begin{aligned} un &= \left(10^k - 1\right)n = 10^kn - n = (n-1)10^k + 10^k - n \\ &= (n-1)10^k + 9\cdot 10^{k-1} + 9\cdot 10^{k-2} + \cdots + 9\cdot 10 + (10-n) \end{aligned}$$

i stąd wynika, że $s(un) = (n-1) + 9 + 9 + \cdots + 9 + (10-n) = 9k$.

Załóżmy teraz, że $n = a_p 10^p + a_{p-1} 10^{p-1} + \cdots + a_1 10 + a_0$, gdzie $p \leqslant k-1$, $a_0, \ldots, a_p \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ oraz $a_p \neq 0$. Wykażemy, że $s(un) = 9k$. W tym celu zastosujemy indukcję matematyczną względem liczby p. Dla $p = 0$ wykazaliśmy już to na początku tego dowodu. Niech teraz $p \geqslant 1$.

Jeśli $a_0 = 0$, to $n = 10m$ dla pewnego $m \in \mathbb{N}$ i wtedy teza wynika z założenia indukcyjnego oraz z tego, że dla każdej liczby naturalnej v zachodzi równość $s(10v) = s(v)$.

Możemy więc dalej założyć, że $a_0 \neq 0$. Z tego założenia wynika, że $n < 10^k$ oraz

$$n = a_{k-1} 10^{k-1} + a_{k-2} 10^{k-2} + \cdots + a_1 10 + a_0,$$

gdzie $a_0, \ldots, a_{k-1} \in \{0, 1, \ldots, 9\}$, $a_0 \neq 0$ (nie zakładamy, że a_{k-1} jest różne od zera). Mamy teraz:

$$\begin{aligned} un &= \left(10^k - 1\right)\left(a_{k-1}10^{k-1} + \cdots + a_1 10 + a_0\right) \\ &= \left(a_{k-1}10^{2k-1} + a_{k-2}10^{2k-2} + \cdots + a_1 10^{k+1} + a_0 10^k\right) - \left(a_{k-1}10^{k-1} + \cdots + a_0\right) \\ &= \left(a_{k-1}10^{2k-1} + \cdots + a_1 10^{k+1} + (a_0 - 1)10^k\right) + 10^k - \left(a_{k-1}10^{k-1} + \cdots + a_0\right) \\ &= \left(a_{k-1}10^{2k-1} + \cdots + a_1 10^{k+1} + (a_0 - 1)10^k\right) + \left(9 \cdot 10^{k-1} + 9 \cdot 10^{k-2} + \cdots + 9 \cdot 10 + 10\right) \\ &\quad - \left(a_{k-1}10^{k-1} + \cdots + a_0\right) \\ &= a_{k-1}10^{2k-1} + \cdots + a_1 10^{k+1} + (a_0 - 1)10^k + (9 - a_{k-1})10^{k-1} + (9 - a_{k-2})10^{k-2} \\ &\quad + \cdots + (9 - a_1)10 + (10 - a_0) \end{aligned}$$

Kolejnymi cyframi liczby $99n$ są więc:

$$a_{k-1},\ a_{k-2},\ \ldots,\ a_1,\ (a_0 - 1),\ (9 - a_{k-1}),\ (9 - a_{k-2}),\ \ldots,\ (9 - a_1),\ (10 - a_0).$$

Sumą tych wszystkich cyfr jest $9k$, a zatem $s(un) = 9k$. ⊠

Z tego twierdzenia wynika:

3.5.10. *Jeśli u jest k-cyfrową liczbą, której cyframi są same dziewiątki, to $s(u^2) = s(u) = 9k$.*

3.5.11. *Dla każdej liczby naturalnej k istnieje liczba naturalna m taka, że*

$$s(m) = s(2m) = \cdots = s(m^2) = 9k.$$

Dowód. *Taką liczbą jest na przykład $m = 10^k - 1$.* ([OM] Polska 2001/2002).

3.5.12. *Niech $n \in \mathbb{N}$. Jeśli $s(n) = s(2n) = s(3n) = \cdots = s(n^2)$, to $n = 1$ lub $n = 10^m - 1$.* ([OM] Czechy-Słowacja 1991/1992).

3.5.13. *Dla każdej liczby naturalnej k istnieje liczba naturalna m taka, że*

$$s_2(m) = s_2(2m) = \cdots = s_2(m^2) = k,$$

gdzie $s_2(u)$ oznacza sumę cyfr liczby u w systemie dwójkowym. Dowód. *Taką liczbą jest na przykład $m = 2^k - 1$.* ([OM] Polska 2001/2002).

---

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

3.6 Liczby postaci s(an)

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

3.6.1. *Dla każdego $a \in \mathbb{N}$ istnieje nieskończenie wiele bezzerowych liczb $n \in \mathbb{N}$ takich, że $s(n) = s(an)$.* ([WaJ] 139(70), [Kw] 7/1971 M 44).

D. ([WaJ] s.157). Niech $a = a_r 10^r + \cdots + a_1 10 + a_0$, gdzie $a_0, a_1, \ldots, a_r$ są cyframi. Bez straty ogólności rozwiązania możemy założyć, że $a_0 > 0$. Rozpatrzmy liczbę n postaci $10^m - 1 = 99\ldots9$ dla $m > r$ i zauważmy, że

$$\begin{aligned} an &= a_r 10^{r+m} + a_{r-1}10^{r-1+m} + \cdots + a_1 10^{1+m} + (a_0 - 1)10^m \\ &\quad + 9 \cdot 10^{m-1} + 9 \cdot 10^{m-2} + \cdots + 9 \cdot 10^{r+1} \\ &\quad + (9 - a_r)10^r + (9 - a_{r-1})10^{r-1} + \cdots + (9 - a_1)10^1 + (10 - a_0). \end{aligned}$$

Wtedy $s(an) = 9m = s(n)$. Takich liczb n oczywiście jest nieskończenie wiele. ⊠

3.6.2.

(1) $s(n) = s(2n) \Rightarrow 9 \mid n$. [GaT] 4/62.

(2) $s(n) = s(3n) \Rightarrow 9 \mid n$. [Andz] 39.

(3) $s(n) = s(5n) \Rightarrow 9 \mid n$. [Kw] 5/1970 33.

D. Wynika to z 3.5.3. ⊠

3.6.3. *Dla każdej liczby naturalnej n istnieje liczba naturalna a taka, że wszystkie liczby $s(a), s(2a), s(3a), \ldots, s(na)$ są parzyste.* ([OM] Rosja 1997).

D. Zachodzi to np. dla $a = 10^p + 1$, gdzie $n < 10^p$. ⊠

3.6.4. *Nie istnieje żadna liczba naturalna a taka, że wszystkie liczby postaci $s(na)$, gdzie $n \in \mathbb{N}$, są parzyste.* ([Nord] 1993, [OM] Rosja 1997).

3.6.5. *Czy prawdziwy jest analog zdania* 3.6.3 *dla liczb nieparzystych?*

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

3.7 Suma cyfr i podzielność

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

3.7.1. $n \equiv s(n) \pmod 9$ *dla* $n \in \mathbb{N}$.

3.7.2. $s(a) + s(b) \equiv s(a+b) \pmod 9$ *dla* $a, b \in \mathbb{N}$.

D. $s(a+b) \equiv a + b \equiv s(a) + s(b) \pmod 9$. ⊠

3.7.3. *Jeśli $a_1, \ldots, a_n$ są liczbami naturalnymi, to*

$$s(a_1) + \cdots + s(a_n) \equiv s(a_1 + \cdots + a_n) \pmod 9.$$

3.7.4. *Jeśli* $k, n \in \mathbb{N}$, *to* $s(kn) \equiv ks(n) \pmod 9$.

3.7.5. *Jeśli* $n, k \in \mathbb{N}$, *to* $s(kn) = ks(n) - 9 \sum_{t \geqslant 1} \left[k\left\{\frac{n}{10^t}\right\}\right]$. ([Miss] z.23).

3.7.6. *Niech* $k, n \in \mathbb{N}$, $3 \nmid n$, $k \geqslant n$. *Istnieje wtedy liczba naturalna* m *taka, że* $n \mid m$ *oraz* $s(m) = k$. ([IMO] Shortlist 1999, [Djmp] 303(647)).

3.7.7. *Nie istnieje liczba naturalna* n *taka, że* $1998 \mid n$ *i* $s(n) < 27$. ([Kw] 4/1998 s.50,59).

3.8.8. *Niech* $m \in \mathbb{N}$. *Nie istnieje liczba naturalna* n *podzielna przez* $11\dots11$ (m *jedynek*) *taka, że* $s(n) < m$. ([WaJ] 329(82)).

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

3.8 Sumy cyfr i liczby przeniesień do "pamięci" w dodawaniu

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

Spójrzmy na dodawanie liczb $a = 789$ i $b = 425$:

$$\begin{array}{r} 789 \\ 425 \\ \hline 1214 \end{array}$$

Najpierw dodajemy cyfry jedności: $9 + 5 = 14$. Piszemy 4 oraz 1 przenosimy do "pamięci". Następnie dodajemy cyfry dziesiątek i do tego dodajemy to co było w "pamięci". Mamy: $8+2+1 = 11$. Piszemy 1 i 1 przenosimy do "pamięci". Podobnie: $7+4+1 = 12$, piszemy 2 i 1 przenosimy do "pamięci". Następnie spisujemy to co było w "pamięci". W tym dodawaniu aż trzy razy przenosiliśmy liczbę 1 do "pamięci". Suma wszystkich liczb umieszczonych w tej "pamięci" jest równa 3.

Dla rozważanych liczb a i b mamy:

$$\frac{s(a)+s(b)-s(a+b)}{9} = \frac{s(789)+s(425)-s(1214)}{9} = \frac{24+11-8}{9} = \frac{27}{9} = 3.$$

Tutaj w wyniku otrzymaliśmy 3 i suma liczb przeniesionych do "pamięci" też jest równa 3. To nie jest przypadek. Poniższe twierdzenie mówi, że tak jest zawsze.

3.8.1. *Niech* $a, b \in \mathbb{N}$. *Oznaczmy:*

$$t(a,b) = \frac{s(a) + s(b) - s(a+b)}{9}.$$

Z 3.7.2 *wiemy, że* $t(a,b)$ *jest liczbą całkowitą. Natomiast z* 3.3.1 *wiemy, że jest to liczba nieujemna. Liczba* $t(a,b)$ *jest sumą liczb przeniesionych do "pamięci" podczas dodawania w układzie dziesiętnym liczb* a *i* b.

D. Dopisując na początek jednej z liczb a lub b zera możemy założyć, że liczby te mają jednakową liczbę cyfr. Niech

$$a = a_n 10^n + \cdots + a_1 10 + a_0, \quad b = b_n 10^n + \cdots + b_1 10 + b_0,$$

gdzie $a_0, \ldots, a_n, b_0, \ldots, b_n$ są liczbami należącymi do zbioru $\{0, 1, 2, \ldots, 9\}$. Tworzymy liczby $c_0, c_1, \ldots, c_{n+1}$ oraz $r_0, r_1, \ldots, r_n$ w następujący sposób. Przyjmujemy, że $c_0 = 0$ oraz, że

$$c_{i+1} = \left[\frac{a_i + b_i + c_i}{10}\right], \quad r_i = (a_i + b_i + c_i) - 10c_{i+1},$$

dla $i = 0, 1, \ldots, n$. Mamy wówczas

$$a_i + b_i + c_i = 10c_{i+1} + r_i, \quad 0 \leqslant r_i < 10$$

dla $i = 0, 1, \ldots, n$. Ponadto, wszystkie liczby $c_0, c_1, \ldots, c_{n+1}$ są nieujemne. Zauważmy, że

$$a + b = c_{n+1}10^{n+1} + r_n 10^n + r_{n-1}10^{n-1} + \cdots + r_1 10 + r_0.$$

Zatem $s(a+b) = c_{n+1} + r_n + r_{n-1} + \cdots + r_1 + r_0$ i ponadto $s(a) = a_n + \cdots + a_0$, $s(b) = b_n + \cdots + b_0$.

Rozważana tu liczba przeniesień do "pamięci" jest z definicji równa liczbie $c_1 + c_2 + \cdots + c_{n+1}$. Należy zatem pokazać, że $t(a, b) = c_1 + \cdots + c_{n+1}$. Sprawdzamy:

$$\begin{aligned}
t(a,b) &= \tfrac{1}{9}(s(a) + s(b) - s(a+b)) \\
&= \tfrac{1}{9}\left(\sum_{i=0}^n a_i + \sum_{i=0}^n b_i - c_{n+1} - \sum_{i=0}^n r_i\right) \\
&= \tfrac{1}{9}\left(\sum_{i=0}^n (a_i + b_i - r_i) - c_{n+1}\right) \\
&= \tfrac{1}{9}\left(\sum_{i=0}^n (10c_{i+1} - c_i) - c_{n+1}\right) \\
&= \tfrac{1}{9}\left(\sum_{i=1}^{n+1} 10c_i - \sum_{i=0}^n c_i - c_{n+1}\right) \\
&= \tfrac{1}{9}\left(9\sum_{i=1}^{n+1} c_i\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n+1} c_i. \quad \boxtimes
\end{aligned}$$

3.8.2. *Niech $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{N}$. Rozważmy liczbę*

$$\frac{s(a_1) + s(a_2) + \cdots + s(a_n) - s(a_1 + \cdots + a_n)}{9}.$$

Jest to nieujemna liczba całkowita będąca sumą wszystkich liczb przeniesionych do "pamięci" podczas dodawania w układzie dziesiętnym liczb $a_1, a_2, \ldots, a_n$. (Dowód taki jak 3.8.1).

3.8.3. *Dla danej liczby naturalnej n oznaczmy przez $s_q(n)$ sumę jej cyfr w układzie o podstawie $q \geqslant 2$. Mamy wówczas:*

(1) $s_q(n) \equiv n \pmod{q-1}$;

(2) $s_q(a) + s_q(b) \equiv s_q(a+b) \pmod{q-1}$ *dla $a, b \in \mathbb{N}$;*

(3) *Niech $a, b \in \mathbb{N}$. Oznaczmy:*

$$t_q(a,b) = \frac{s_q(a) + s_q(b) - s_q(a+b)}{q-1}.$$

Liczba $t_q(a,b)$ jest całkowita. Jest oczywiste, że liczba ta jest nieujemna. Liczba $t_q(a,b)$ jest liczbą przeniesień do "pamięci" w dodawaniu w układzie o podstawie q liczb a i b.

D. Własności (1) i (2) są oczywiste. Własność (3) dowodzimy tak samo jak 3.8.1 zastępując liczbę 10 przez q. ⊠

3.8.4. *Dla danej liczby naturalnej n oznaczmy przez $s_q(n)$ sumę jej cyfr w układzie o podstawie $q \geqslant 2$. Niech $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{N}$. Rozważmy liczbę*

$$\frac{s_q(a_1) + s_q(a_2) + \cdots + s_q(a_n) - s_q(a_1 + \cdots + a_n)}{q-1}.$$

Jest to nieujemna liczba całkowita będąca sumą wszystkich liczb przeniesionych do "pamięci" w dodawaniu w układzie o podstawie q liczb $a_1, a_2, \dots, a_n$. (Dowód taki jak 3.8.1).

3.8.5. *Niech $a, b \in \mathbb{N}$. Równość $s(a+b) = s(a) + s(b)$ zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy podczas dodawania liczb a i b nie ma żadnych przeniesień do pamięci.*
([Kw] 5/1972 31, [GaT] s.236, [ME] 7(4)(2002) z.157).

D. Wynika to z 3.8.1. ⊠

3.8.6. *Jeśli $s(n) = 100$ i $s(44n) = 800$, to $s(3n) = 300$.* ([Kw] 2/2000 M1697).

D. ([ME] 7(4)(2002) z.157). Wiadomo (patrz 3.3.1), że dla dowolnych liczb naturalnych a i b zachodzi zawsze nierówność $s(a+b) \leqslant s(a) + s(b)$ i przy tym równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy podczas dodawania liczb a i b nie ma żadnych "przeniesień do pamięci", tzn. jeśli $a = \sum_i a_i 10^i$, $b = \sum_i b_i 10^i$ (gdzie a_i, b_i są cyframi), to każda suma cyfr $a_i + b_i$ jest mniejsza od 10. W szczególności $s(ma) \leqslant ms(a)$, dla $a, m \in \mathbb{N}$.

W naszym przypadku mamy: $800 = s(44n) = s(40n + 4n) \leqslant s(40n) + s(4n) = 2s(4n) \leqslant 8s(n) = 800$ i stąd wynika, że $s(4n) = 400 = s(n)+s(n)+s(n)+s(n)$. Zatem w dodawaniu $n+n+n+n$ nie ma żadnych "przeniesień do pamięci". Tym bardziej więc takich przeniesień nie ma podczas dodawania $n+n+n$. Oznacza to, że $s(3n) = 3s(n) = 300$. ⊠

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

3.9 Sumy cyfr i kolejne liczby naturalne

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

3.9.1. *Najmniejszą liczbą naturalną n taką, że $5 \mid s(n)$ i $5 \mid s(n+1)$ jest 49 999.*
([OM] Moskwa 1999/2000).

3.9.2. *Czy istnieje liczba naturalna n taka, że $7 \mid s(n)$ i $7 \mid s(n+1)$?* ([G-if] 77).

3.9.3. *Czy istnieje liczba naturalna n taka, że $125 \mid s(n)$ i $125 \mid s(n+1)$?* ([GaT] 1/67).

O. Istnieje. Najmniejsze n jest równe $-1 + 8999\dots99000\dots00$ (13 dziewiątek, 14 zer). ⊠

3.9.4. *Wśród każdych 13 kolejnych liczb naturalnych istnieje liczba, której suma cyfr jest podzielna przez 7. Wśród 12 kolejnych liczb $994, 995, \dots, 1005$ nie ma liczby, której suma cyfr jest podzielna przez 7.* ([OM] Rosja 1998).

3.9.5. *Spośród* 39 *kolejnych liczb naturalnych zawsze można wybrać taką liczbę* a*, że liczba* $s(a)$ *jest podzielna przez* 11.

Najmniejszą liczbą naturalną n *taką, że wśród liczb* $s(n+1), s(n+2), \dots, s(n+38)$ *nie ma liczby podzielnej przez* 11 *jest* 999980. ([OM] ZSRR 1991, [WaJ] 3(61)).

3.9.6. *Spośród* $20n + 39$ *kolejnych liczb naturalnych istnieje liczba, której suma cyfr jest podzielna przez* $11 + n$. ([MOc] 2002 z.153).

3.9.7. *Spośród* 79 *kolejnych liczb naturalnych zawsze można wybrać taką liczbę* a*, że liczba* $s(a)$ *jest podzielna przez* 13. ([Balt] 1998).

3.9.8. *Niech* $n \in \{1, 2, \dots, 10\}$. *Spośród* $20n - 1$ *kolejnych liczb naturalnych istnieje liczba, której suma cyfr jest podzielna przez* $n + 9$. ([MOc] 2002 z.153).

3.9.9. *Danych jest* 70 *kolejnych dziesięciocyfrowych liczb naturalnych. Wykazać, że suma cyfr początkowych* 20 *liczb jest większa od sumy cyfr dziesięciu ostatnich liczb.*
([OM] St Petersburg 2000).

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

3.10 Suma cyfr i ciągi arytmetyczne

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

3.10.1. *W każdym nieskończonym ciągu arytmetycznym o wyrazach naturalnych istnieją dwa wyrazy posiadające jednakowe sumy cyfr.* ([OM] Leningrad 1990, [Kw] 3/1991 19).

3.10.2. *Dla każdej liczby naturalnej* m *istnieje liczba naturalna* a *taka, że wszystkie liczby*

$$s(a),\ s(2a),\ \dots,\ s(ma)$$

są parami różne. Dowód. *Taką liczbą* a *jest na przykład* $10^t + 1$*, gdzie* $m < 10^t$. ([OM] Ukraina 1998).

3.10.3. *Dla każdej naturalnej liczby* a *istnieją dwie różne liczby naturalne* m *i* n *takie, że* $s(na) = s(ma)$. Dowód. *Wynika z* 3.10.1. ([OM] Ukraina 1998).

3.10.4. *Dla każdej liczby naturalnej* n *istnieje liczba naturalna* m *taka, że liczba* $s(nm)$ *jest nieparzysta.* ([TTta] 1992).

3.10.5. *Niech* $a = 2739726$. *Suma cyfr każdej z liczb* a, $2a$, $3a$, $\dots$, $72a$, *jest równa* 36. Uwaga. *Liczba* a *dzieli się przez* 9999. ([Szu87] 33).

3.10.6. *Dla każdej liczby rzeczywistej* M *istnieje nieskończony ciąg arytmetyczny* (a_n) *liczb naturalnych, o różnicy niepodzielnej przez* 10 *taki, że* $s(a_n) > M$ *dla wszystkich* $n \in \mathbb{N}$.
([IMO] Shortlist 1999, [Djmp] 303(648)).

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

3.11 Liczba liczb k-cyfrowych o danej sumie cyfr

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

Przez $\gamma_k(m)$ oznaczać będziemy w tym podrozdziale liczbę wszystkich k-cyfrowych liczb naturalnych, których suma cyfr jest równa m. Dla przykładu, $\gamma_4(3) = 10$, gdyż istnieje dokładnie 10 liczb 4-cyfrowych, których suma cyfr jest równa 3; są to liczby; $1002, 1011, 1020, 1101, 1110, 1200, 2001, 2010, 2100, 3000$.

Suma cyfr k-cyfrowej liczby naturalnej jest co najmniej równa 1 i co najwyżej równa $9k$. Jeśli więc $m > 19k$ lub $m < 1$, to $\gamma_k(m) = 0$. Jest oczywiste, że $\gamma_1(m) = 1$ dla $1 \leqslant m < 10$. Ponadto, dla każdego k zachodzą równości: $\gamma_k(1) = 1$, $\gamma_k(9k) = 1$.

3.11.1. *Liczby wszystkich dwucyfrowych liczb naturalnych o danej sumie cyfr:*

$\gamma_2(1) = 1,$	$\gamma_2(4) = 4,$	$\gamma_2(7) = 7,$	$\gamma_2(10) = 9,$	$\gamma_2(13) = 6,$	$\gamma_2(16) = 3,$
$\gamma_2(2) = 2,$	$\gamma_2(5) = 5,$	$\gamma_2(8) = 8,$	$\gamma_2(11) = 8,$	$\gamma_2(14) = 5,$	$\gamma_2(17) = 2,$
$\gamma_2(3) = 3,$	$\gamma_2(6) = 6,$	$\gamma_2(9) = 9,$	$\gamma_2(12) = 7,$	$\gamma_2(15) = 4,$	$\gamma_2(18) = 1.$

3.11.2. *Liczby wszystkich trzycyfrowych liczb naturalnych o danej sumie cyfr:*

$\gamma_3(1) = 1,$	$\gamma_3(10) = 54,$	$\gamma_3(19) = 45,$
$\gamma_3(2) = 3,$	$\gamma_3(11) = 61,$	$\gamma_3(20) = 36,$
$\gamma_3(3) = 6,$	$\gamma_3(12) = 66,$	$\gamma_3(21) = 28,$
$\gamma_3(4) = 10,$	$\gamma_3(13) = 69,$	$\gamma_3(22) = 21,$
$\gamma_3(5) = 15,$	$\gamma_3(14) = 70,$	$\gamma_3(23) = 15,$
$\gamma_3(6) = 21,$	$\gamma_3(15) = 69,$	$\gamma_3(24) = 10,$
$\gamma_3(7) = 28,$	$\gamma_3(16) = 66,$	$\gamma_3(25) = 6,$
$\gamma_3(8) = 36,$	$\gamma_3(17) = 61,$	$\gamma_3(26) = 3,$
$\gamma_3(9) = 45,$	$\gamma_3(18) = 54,$	$\gamma_3(27) = 1.$

3.11.3. *Liczby wszystkich czterocyfrowych liczb naturalnych o danej sumie cyfr:*

$\gamma_4(1) = 1,$	$\gamma_4(10) = 219,$	$\gamma_4(19) = 615,$	$\gamma_4(28) = 165,$
$\gamma_4(2) = 4,$	$\gamma_4(11) = 279,$	$\gamma_4(20) = 597,$	$\gamma_4(29) = 120,$
$\gamma_4(3) = 10,$	$\gamma_4(12) = 342,$	$\gamma_4(21) = 564,$	$\gamma_4(30) = 84,$
$\gamma_4(4) = 20,$	$\gamma_4(13) = 405,$	$\gamma_4(22) = 519,$	$\gamma_4(31) = 56,$
$\gamma_4(5) = 35,$	$\gamma_4(14) = 465,$	$\gamma_4(23) = 465,$	$\gamma_4(32) = 35,$
$\gamma_4(6) = 56,$	$\gamma_4(15) = 519,$	$\gamma_4(24) = 405,$	$\gamma_4(33) = 20,$
$\gamma_4(7) = 84,$	$\gamma_4(16) = 564,$	$\gamma_4(25) = 342,$	$\gamma_4(34) = 10,$
$\gamma_4(8) = 120,$	$\gamma_4(17) = 597,$	$\gamma_4(26) = 279,$	$\gamma_4(35) = 4,$
$\gamma_4(9) = 165,$	$\gamma_4(18) = 615,$	$\gamma_4(27) = 219,$	$\gamma_4(36) = 1.$

3.11.4. *Liczby wszystkich pięciocyfrowych liczb naturalnych o danej sumie cyfr:*

$\gamma_5(1) = 1,$	$\gamma_5(10) = 714,$	$\gamma_5(19) = 4620,$	$\gamma_5(28) = 4170,$	$\gamma_5(37) = 495,$
$\gamma_5(2) = 5,$	$\gamma_5(11) = 992,$	$\gamma_5(20) = 4998,$	$\gamma_5(29) = 3675,$	$\gamma_5(38) = 330,$
$\gamma_5(3) = 15,$	$\gamma_5(12) = 1330,$	$\gamma_5(21) = 5283,$	$\gamma_5(30) = 3162,$	$\gamma_5(39) = 210,$
$\gamma_5(4) = 35,$	$\gamma_5(13) = 1725,$	$\gamma_5(22) = 5460,$	$\gamma_5(31) = 2654,$	$\gamma_5(40) = 126,$
$\gamma_5(5) = 70,$	$\gamma_5(14) = 2170,$	$\gamma_5(23) = 5520,$	$\gamma_5(32) = 2170,$	$\gamma_5(41) = 70,$
$\gamma_5(6) = 126,$	$\gamma_5(15) = 2654,$	$\gamma_5(24) = 5460,$	$\gamma_5(33) = 1725,$	$\gamma_5(42) = 35,$
$\gamma_5(7) = 210,$	$\gamma_5(16) = 3162,$	$\gamma_5(25) = 5283,$	$\gamma_5(34) = 1330,$	$\gamma_5(43) = 15,$
$\gamma_5(8) = 330,$	$\gamma_5(17) = 3675,$	$\gamma_5(26) = 4998,$	$\gamma_5(35) = 992,$	$\gamma_5(44) = 5,$
$\gamma_5(9) = 495,$	$\gamma_5(18) = 4170,$	$\gamma_5(27) = 4620,$	$\gamma_5(36) = 714,$	$\gamma_5(45) = 1.$

3.11.5. *Przykłady pewnych liczb postaci* $\gamma_k(m)$.

$\gamma_6(21) = 33787$,	$\gamma_7(24) = 275988$,	$\gamma_8(33) = 4016685$,
$\gamma_6(22) = 37917$,	$\gamma_7(25) = 312873$,	$\gamma_8(34) = 4194135$,
$\gamma_6(23) = 41712$,	$\gamma_7(26) = 348558$,	$\gamma_8(35) = 4316565$,
$\gamma_6(24) = 45002$,	$\gamma_7(27) = 381723$,	$\gamma_8(36) = 4379055$,
$\gamma_6(25) = 47631$,	$\gamma_7(28) = 411048$,	$\gamma_8(37) = 4379055$,
$\gamma_6(26) = 49467$,	$\gamma_7(29) = 435303$,	$\gamma_8(38) = 4316565$,
$\gamma_6(27) = 50412$,	$\gamma_7(30) = 453438$,	$\gamma_8(39) = 4194135$,
$\gamma_6(28) = 50412$,	$\gamma_7(31) = 464653$,	$\gamma_8(40) = 4016685$,
$\gamma_6(29) = 49467$,	$\gamma_7(32) = 468448$,	$\gamma_8(41) = 3791180$,
$\gamma_6(30) = 47631$,	$\gamma_7(33) = 464653$,	$\gamma_8(42) = 3526195$. (Maple).

3.11.6. *Zachodzą równości:* $\gamma_2(19-m) = \gamma_2(m)$, $\gamma_3(28-m) = \gamma_3(m)$, $\gamma_4(37-m) = \gamma_4(m)$ *i ogólnie*

$$\gamma_k\left((9k+1)-m\right) = \gamma_k(m),$$

dla wszystkich $k, m \in \mathbb{N}$.

D. Dla $k = 1$ jest to oczywiste. Załóżmy, że $k \geqslant 2$. Jeśli $m > 9k$, to $\gamma_k(m) = 0$ i wtedy również $\gamma_k((19k+1)-m) = 0$. Niech więc m będzie ustaloną liczbą naturalną taką, że $1 \leqslant m \leqslant 9k$. Wtedy $1 \leqslant (9k+1) - m \leqslant 9k$.

Niech A będzie zbiorem wszystkich k-cyfrowych liczb naturalnych, których suma cyfr jest równa m. Niech B będzie zbiorem wszystkich k-cyfrowych liczb naturalnych, których suma cyfr jest równa $(9k+1)-m$. Rozpatrzmy funkcję $f : A \to B$, określoną wzorem

$$f(n) = \left(10^k + 10^{k-1} - 1\right) - n,$$

dla $n \in A$. Z równości $s\left((10^k + 10^{k-1} - 1) - n\right) = (9k+1) - s(n)$ (patrz 3.1.17) wynika, że jeśli $n \in A$, to $f(n) \in B$. Zatem f jest dobrze określoną funkcją. Jest to oczywiście bijekcja. Mamy zatem: $\gamma_k\left((9k+1)-m\right) = |B| = |A| = \gamma_k(m)$. ⊠

3.11.7. $\gamma_k(2) = \gamma_k(9k-1) = k$, *dla* $k \in \mathbb{N}$.

3.11.8. $\gamma_k(3) = \gamma_k(9k-2) = \frac{k(k+1)}{2}$, *dla* $k \in \mathbb{N}$.

D. Równość $\gamma_k(3) = \gamma_k(9k-2)$ wynika z 3.11.6. Wystarczy więc wykazać, że $\gamma_k(3) = \frac{k(k+1)}{2}$. Początkową cyfrą k-cyfrowej liczby naturalnej o sumie cyfr równej 3 może być jedynie 3, 2 lub 1. Jeśli jest 3, to pozostałe cyfry są zerowe. Taka liczba jest tylko jedna. Jeśli początkową cyfrą jest 2, to dokładnie jedna z pozostałych cyfr jest równa 1 i wszystkie inne są zerowe. Takich liczb jest $k-1$.

Załóżmy, że początkową cyfrą jest 1. Wtedy albo wśród pozostałych cyfr jest jedna dwójka i same zera (takich liczb jest $k-1$), albo są dwie jedynki i same zera (takich liczb jest $\binom{k-1}{2} = \frac{(k-1)(k-2)}{2}$). Mamy więc: $\gamma_k(3) = 1 + (k-1) + (k-1) + \frac{(k-1)(k-2)}{2} = \frac{k(k+1)}{2}$. ⊠

3.11.9. $\gamma_k(4) = \gamma_k(9k-3) = \frac{k(k+1)(k+2)}{6}$, *dla* $k \in \mathbb{N}$.

Powyższe fakty są szczególnymi przypadkami następującego stwierdzenia.

3.11.10. *Jeśli* $1 \leqslant m \leqslant 9$, *to dla wszystkich liczb naturalnych* k *zachodzi równość*

$$\gamma_k(m) = \gamma_k((9k+1)-m) = \binom{m+k-2}{m-1}.$$

Stąd w szczególności wynika:

3.11.11. *Jeśli* $1 \leqslant k, m \leqslant 9$, *to* $\gamma_k(m) = \gamma_m(k)$. ([KoMe] z.27).

---

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

3.12 Liczby postaci n + s(n)

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

3.12.1. *Wszystkie liczby naturalne mniejsze od* 200*, które nie są postaci* $m+s(m)$*:* $1, 3, 5, 7, 9, 20, 31, 42, 53, 64, 75, 86, 97, 108, 110, 121, 132, 143, 154, 165, 176, 187, 198$. (Maple).

3.12.2. *Wszystkie liczby naturalne mniejsze od* 100*, które mają dokładnie jedno przedstawienie w postaci* $m+s(m)$*:* $2, 4, 6, 8, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 98, 99$. (Maple).

3.12.3. *Czy istnieje liczba naturalna* n *taka, że* $n + s(n) = 1984$ *?* ([WaJ] 294(80)).

O. Tak. $1962 + s(1962) = 1984$. ⊠

3.12.4. *Czy istnieje liczba naturalna* n *taka, że* $n + s(n) = 1999$ *?* ([OM] Moskwa 1999/2000).

O. Tak. Jedyną taką liczbą jest 1976. ⊠

3.12.5. *Z dwóch kolejnych liczb naturalnych co najmniej jedna jest postaci* $n + s(n)$*.* ([WaJ] 294(80)).

3.12.6. *Liczba* 101 *jest najmniejszą liczbą naturalną posiadającą dwa różne przedstawienia w postaci* $m + s(m)$*;* $101 = 100 + s(100) = 91 + s(91)$.

3.12.7. *Wszystkie liczby naturalne mniejsze od* 1000*, które mają dokładnie dwa przedstawienia w postaci* $m + s(m)$*:* $101, 103, 105, 107, 109, 111, 113, 115, 117, 202, 204, 206, 208, 210, 212, 214, 216, 218, 303, 305, 307, 309, 311, 313, 315, 317, 319, 404, 406, 408, 410, 412, 414, 416, 418, 420, 505, 507, 509, 511, 513, 515, 517, 519, 521, 606, 608, 610, 612, 614, 616, 618, 620, 622, 707, 709, 711, 713, 715, 717, 719, 721, 723, 808, 810, 812, 814, 816, 818, 820, 822, 824, 909, 911, 913, 915, 917, 919, 921, 923, 925$. (Maple).

3.12.8. *Znaleźć trzy różne liczby naturalne* a, b, c *takie, że* $s(a) + a = s(b) + b = s(c) + c$. Odp. *Np.* $a = 10^{15} + 99$*,* $b = 10^{15} + 117$*,* $c = 10^{15} - 9$ *lub* $a = 10^{13} + 91$*,* $b = 10^{13} + 100$*,* $c = 10^{13} - 8$. ([Kw] 5/1994 M1426).

3.12.9. *Istnieją liczby naturalne* $n_1 < n_2 < \cdots < n_{50}$ *takie, że* $n_1 + s(n_1) = n_2 + s(n_2) = \cdots = n_{50} + s(n_{50})$. ([OM] Polska 1998/1999).

3.12.10. *Dla każdej liczby naturalnej* n *istnieje liczba naturalna* m *taka, że równanie* $x + s(x) = m$ *posiada dokładnie* n *rozwiązań.* ([OM] Rumunia 2003).

3.12.11. *Istnieje nieskończenie wiele liczb naturalnych, które nie są postaci* $n + s(n)$*.* ([Kw] 10/1972 40, [Zw] 1999).

R. Taką własność ma każda liczba postaci $\underbrace{11\dots11}_{n}20+n$, $n\in\mathbb{N}$. Na przykład liczba 121 jest taka. ⊠

3.12.12. *Niech* $a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n + s(a_n)$. *Czy liczba* 123456 *występuje w tym ciągu ?* ([TTts] 1985).

3.12.13. *Do danej liczby naturalnej dodajemy sumę jej cyfr stojących na parzystych miejscach. Powtarzamy to kilka razy. Wykazać, że proces ten się stabilizuje.*
([OM] St Petersburg 1993, [Fom] 48/93).

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

3.13 Ciąg n, s(n), ss(n), sss(n), ...

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

Dla danej liczby naturalnej n ciąg

$$s(n),\ s(s(n)),\ s(s(s(n))),\dots$$

stabilizuje się zawsze na jednocyfrowej liczbie, którą oznaczać tu będziemy przez $c(n)$.

3.13.1. *Znaleźć* $c(8^n)$. ([G-if] 148).

R. $c(8^{2k}) = 1$, $c(8^{2k+1}) = 8$. Wynika to z kongruencji $n \equiv s(n) \pmod 9$. ⊠

3.13.2. *Jeśli* n *jest liczbą kwadratową, to* $c(n)$ *jest jedną z liczb* 1, 4, 7 *lub* 9. ([Par] Q622).

3.13.3. *Niech* $a_n = \frac{1}{2}(3^n - 1) = 1 + 3 + 3^2 + \cdots + 3^{n-1}$. *Wtedy* $c(a_n) = 4$. (K.Brown).

3.13.4. $c(n) = 4 \iff c(n + 9) = 4$. (K.Brown).

3.13.5. *Niech* $a, b \in \mathbb{N}$. *Wtedy*

$$c(a) = c(b) \iff a \equiv b \pmod 9.$$

Podobna własność zachodzi dla liczb zapisanych w systemach o podstawach q *i przystających do siebie modulo* $q-1$. (K. Brown).

3.13.6 (C.M. Ingleby 1866)**.** *Dla* $a, b \in \mathbb{N}$ *zachodzi równość:*

$$c(ab) = c(c(a)c(b)).$$

To samo zachodzi w dowolnych systemach numeracji. ([Dic1] 455).

3.13.7. *Jeśli* A *jest ciągiem* $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ *liczb naturalnych, to przez* $s(A)$ *oznaczamy ciąg* $(s(a_1),\ s(a_2),\ \dots,\ s(a_n))$. *Niech* $n = 10^9$ *i niech* $A = (1, 2, \dots, n)$. *Tworzymy ciągi*

$$s(A),\ ss(A),\ sss(A),\dots$$

tak długo, aż otrzymamy ciąg końcowy, tzn. taki ciąg, którego każdy wyraz jest liczbą jednocyfrową. Których liczb w ciągu końcowym będzie więcej: jedynek czy dwójek? ([WaJ] 43(64)).

O. Liczba jedynek będzie o 1 większa od liczby dwójek. ⊠

★ K. Brown, *Sum-of-digits iterations.*
R. Skurnick, *The digital representation ring*, [MG] 87(510)(2003), 505 - 510.

---

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

3.14 Zadania różne

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

3.14.1. *Istnieje nieskończony rosnący ciąg* (b_n) *liczb naturalnych taki, że* $s\left(b_{n+1}^5\right) = b_n^5$*, dla wszystkich* $n \in \mathbb{N}$. ([OM] St Petersburg 1995).

R. Przykładem takiego ciągu jest ciąg (b_n) zdefiniowany rekurencyjnie tak: $b_1 = 9$, $b_{n+1} = 10^{b_n^5/27} - 1$. ⊠

3.14.2. *Niech* $f \in \mathbb{Z}[x]$ *będzie wielomianem o nieujemnych współczynnikach i niech*

$$z_n = s(f(n)), \quad n \in \mathbb{N}.$$

(1) *Wykazać, że w ciągu* (z_n) *pewna liczba występuje nieskończenie wiele razy.*

(2) *Wykazać to samo dla dowolnego wielomianu* $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ *z dodatnim najwyższym współczynnikiem.* ([OM] ZSRR 1975, [OM] Polska 1997).

D. ([WaJ] s.196). (1). Wielomian $f(x)$ ma postać $f(x) = a_r x^r + \cdots + a_1 x + a_0$, gdzie $a_r, \ldots, a_1, a_0$ są nieujemnymi liczbami całkowitymi. Niech $s = s(a_r) + s(a_{r-1}) + \cdots + s(a_1) + s(a_0)$. Niech n_0 będzie liczbą naturalną taką, że liczba 10^{n_0} jest większa od wszystkich liczb $a_r, \ldots, a_1, a_0$. Wówczas dla wszystkich $n \geqslant n_0$ mamy $z_{10^n} = s(f(10^n)) = s$.

(2). Łatwo wykazać, że istnieje taka liczba naturalna d, że wszystkie współczynniki wielomianu $f(x+d)$ są liczbami naturalnymi. Wystarczy zatem zastosować (1) dla wielomianu $f(x+d)$. ⊠

3.14.3. *Niech* $v(n)$ *oznacza sumę* $s(1) + s(2) + \cdots + s(n)$. *Wtedy:*

(1) $v(1) = 1,\ v(2) = 3,\ v(3) = 6,\ v(9) = 45,\ v(10) = 46,\ v(11) = 48,\ v(12) = 51.$

(2) $v(100) = 901,\ v(1980) = 27558.$

(3) $v(10^n - 1) = 45n \cdot 10^{n-1}$ *dla* $n \in \mathbb{N}$.

(4) $v(\overline{ab}) = a(5a + b + 41) + b(b+1)/2.$

(5) $v(\overline{abc}) = a(50a + \overline{bc} + 851) + b(5b + c + 41) + c(c+1)/2.$ ([Kw] 1/1981 29).

3.14.4. *Niech* b_n *oznacza liczbę wszystkich takich liczb naturalnych* m*, że* $s(m) = n$ *oraz w zapisie dziesiętnym liczby* m *występują tylko cyfry należące do zbioru* $\{1, 3, 4\}$. *Jeśli* n *jest parzyste, to* b_n *jest liczbą kwadratową.* ([MOc] 2005 z.372).

U. Można udowodnić, że $b_{2k} = u_{k+1}^2$, $b_{2k-1} = u_{k+1}u_k$, gdzie (u_n) jest ciągiem liczb Fibonacciego $(u_1 = 1, u_2 = 1, u_{n+2} = u_{n+1} + u_n)$. ⊠

3.14.5. *Niech* $D : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *będzie funkcją określoną wzorem*

$$D(n) = s(n)^2, \quad \text{dla } n \in \mathbb{N}.$$

Dla każdej liczby naturalnej n *istnieje liczba naturalna* k *taka, że* $D^k(n)$ *jest jedną z liczb* 1*,* 81 *lub* 169. ([Mon] 53(10)(1946) s.593).



4 Arytmetyczne operacje na cyfrach



4.1 Suma kwadratów cyfr

Hugo Steinhaus w książeczce [St] podaje (jako zadanie do udowodnienia) następujące twierdzenie.

4.1.1. *Napiszmy dowolną liczbę naturalną w dziesiątkowym układzie pozycyjnym i obliczmy sumę kwadratów cyfr tej liczby. Z otrzymaną liczbą zróbmy to samo i postępujmy w ten sam sposób dalej. Jeżeli ten proces nie doprowadzi nas do jedynki (po czym oczywiście jedynka będzie powtarzać się bezustannie), to doprowadzi na pewno do liczby* 145*, po czym wystąpi cykl*

$$145,\ 42,\ 20,\ 4,\ 16,\ 37,\ 58,\ 89,$$

który będzie się powtarzać. ([Porg], [Mat] 3/1952 57, [St]).

Startując na przykład od liczby 5699999 i powtarzając opisaną w twierdzeniu procedurę otrzymamy ciąg:

$$5699999,\ 466,\ 88,\ 128,\ 69,\ 117,\ 51,\ 26,\ 40,\ 16,\ 37,\ 58,\ 89,\ 145.$$

Startując natomiast od liczby 688888 mamy:

$$688888,\ 356,\ 70,\ 49,\ 97,\ 130,\ 10,\ 1.$$

Twierdzenie to można udowodnić w następujący sposób.

D. Niech n będzie daną liczbą naturalną. Niech k będzie liczbą cyfr liczby n oraz niech n' oznacza sumę kwadratów cyfr liczby n. Jeśli $k \geqslant 4$, to $k < 10^{k-3}$ i wówczas:

$$n' \leqslant 9^2 k = 81k < 100k < 10^2 \cdot 10^{k-3} = 10^{k-1}.$$

Jeśli więc $k \geqslant 4$, to liczba cyfr liczby n' jest mniejsza od liczby cyfr liczby n. Wystarczy zatem wykazać, że badaną własność posiadają wszystkie liczby naturalne mniejsze od 1000. Jeśli $n < 1000$, to $n' \leqslant 999' = 3 \cdot 9^2 = 243$. Możemy więc ograniczyć się tylko do liczb naturalnych n mniejszych lub równych 243. Z łatwością sprawdzamy, że wszystkie takie liczby spełniają tezę. ⊠

4.1.2. *Jeśli suma kwadratów wszystkich cyfr liczby naturalnej a jest równa $a+1$, to $a = 35$ lub* 75. ([UsaT] 2000/2001).

4.1.3. *Niech $q \geqslant 2$ i n będą liczbami naturalnymi i niech $n = a_s q^s + \cdots + a_1 q + a_0$ będzie przedstawieniem liczby n w zapisie numeracji o podstawie q. Oznaczmy*

$$k(n) := a_s^2 + a_{s-1}^2 + \cdots + a_0^2.$$

(1) *Jeśli* $k(n) = n$, *to* $n = 1$ *lub* $s = 1$, *tzn.* $n = 1$ *lub* n *ma dokładnie dwie cyfry w zapisie o podstawie* q.

(2) *Liczba dwucyfrowych liczb* n *takich, że* $k(n) = n$, *jest parzysta.*

(3) *Jeśli* q *jest nieparzyste, to istnieje dwucyfrowa liczba* n *taka, że* $k(n) = n$.

([IMO] Longlist 1983, [Djmp] s.159).

★ Iseki, [Pjap] 36(1960), 578-583.
Józef Kwiatkowski, A. Nowicki, *Uogólnienia zadania Steinhausa o liczbie* 145, [Dlt] 4/1998.
S. P. Mohanty, H. Kumar, *Powers of sums of digits*, [MM] 52(5)(1979) 310-312.
[Mon], 74(1)(1967) E1810, 73(3)(1968) s.294.
B. M. Stewart, *Sums of functions of digits*, [CanJ] 12(1960), 374-389.
M. Szurek, [Szu87], 55-56.
I. Zawiślak, *Arytmetyczne operacje na cyfrach liczb naturalnych*, [Pmgr] 2009.

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

4.2 Liczby szczęśliwe

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

Niech $g(n)$ oznacza sumę kwadratów wszystkich cyfr liczby n. Przykłady: $g(123) = 14$; $g(55) = 50$; $g(145) = 42$.

Niech $n \in \mathbb{N}$. Jeśli w ciągu $n, g(n), gg(n), ggg(n), \ldots$ występuje liczba 1, to od pewnego miejsca wszystkie wyrazy tego ciągu są równe 1. Jeśli liczba n spełnia ten warunek, to mówi się (patrz np. [Gy04] 357-359), że n jest liczbą *szczęśliwą* (ang. *happy number*). W internecie można znaleźć sporo różnych ciekawostek o tego rodzaju liczbach szczęśliwych.

4.2.1. *W przedziale* $[1, 100]$ *istnieje dokładnie* 20 *liczb szczęśliwych:*

$$1, 7, 10, 13, 19, 23, 28, 31, 32, 44, 49, 68, 70, 79, 82, 86, 91, 94, 97, 100.$$ (Maple).

4.2.2. *Liczba liczb szczęśliwych w przedziale* $[1, 1000]$ *jest równa* 143. (Maple).

4.2.3. *Para* $(31, 32)$, *to najmniejsza para kolejnych liczb naturalnych szczęśliwych. Następnymi takimi parami są:* $(129, 130)$, $(192, 193)$, $(262, 263)$, $(301, 302)$, $(319, 320)$, $(367, 368)$, $(391, 392)$, $(565, 566)$, $(622, 623)$, $(637, 638)$, $(655, 656)$, $(912, 913)$, $(931, 932)$, $(1029, 1030)$. (Maple).

4.2.4. *Trójka* $(1880, 1881, 1882)$, *to najmniejsza trójka kolejnych liczb naturalnych szczęśliwych. Następnymi takimi trójkami są:* $(4780, 4781, 4782)$, $(4870, 4871, 4872)$, $(7480, 7481, 7482)$. (Maple).

4.2.5. *Czwórka* $(7839, 7840, 7841, 7842)$, *to najmniejsza czwórka kolejnych liczb naturalnych szczęśliwych. Następnymi takimi czwórkami są:* $(8739, 8740, 8741, 8742)$, $(11248, 11249, 11250, 11251)$, $(12148, 12149, 12150, 12151)$. (Maple).

4.2.6. *Piątka* $(44488, 44489, 44490, 44491, 44492)$, *to najmniejsza piątka kolejnych liczb naturalnych szczęśliwych. Następnymi takimi piątkami są:* $(222688, 222689, 222690, 222691, 222692)$, $(226288, 226289, 226290, 226291, 226292)$, $(258598, 258599, 258600, 258601, 258602)$. (Maple).

---

ooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

4.3 Suma sześcianów cyfr

ooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

Istnieje analog twierdzenia 4.1.1 dla sześcianów. Spójrzmy najpierw na przykłady.

$$\begin{aligned} 1^3 + 5^3 + 3^3 &= 153, \\ 3^3 + 7^3 + 0^3 &= 370, \\ 3^3 + 7^3 + 1^3 &= 371, \\ 4^3 + 0^3 + 7^3 &= 407. \end{aligned}$$

Oznaczmy przez $h(n)$ sumę sześcianów cyfr liczby naturalnej n. Z przykładów tych wnioskujemy, że istnieją 4 liczby naturalne n, różne od 1, spełniające równość $h(n) = n$. Liczbami tymi są: 153, 370, 371 oraz 407. Można wykazać, że innych liczb o takiej własności nie ma. Istnieją dokładnie dwie pary (a, b) liczb naturalnych spełniających równości: $h(a) = b$, $h(b) = a$. Są to pary $(136, 244)$ i $(919, 1459)$. Istnieją ponadto (dokładnie dwie) trójki (a, b, c) takie, że $h(a) = b$, $h(b) = c$ i $h(c) = a$. Trójkami tymi są $(55, 250, 133)$ oraz $(160, 217, 352)$.

4.3.1. *Napiszmy dowolną liczbę naturalną w dziesiątkowym układzie pozycyjnym i obliczmy sumę sześcianów cyfr tej liczby. Z otrzymaną liczbą zróbmy to samo i postępujmy w ten sam sposób dalej. Proces ten doprowadzi nas zawsze do jednej z liczb:* 1, 55, 136, 153, 160, 370, 371, 407, 919.

D. Niech n będzie daną liczbą naturalną i niech k będzie liczbą cyfr liczby n. Jeśli $k \geqslant 5$, to $k < 10^{k-4}$ i wówczas:

$$h(n) \leqslant 9^3 k < 10^3 k < 10^3 \cdot 10^{k-4} = 10^{k-1}.$$

Jeśli więc $k \geqslant 5$, to liczba cyfr liczby $h(n)$ jest mniejsza od liczby cyfr liczby n. Wystarczy zatem wykazać, że badaną własność posiadają wszystkie liczby naturalne mniejsze od 10000. Jeśli $n < 10000$, to $h(n) \leqslant h(9999) = 4 \cdot 9^3 = 2916$. Możemy więc ograniczyć się tylko do liczb naturalnych n mniejszych lub równych 2916. Z łatwością sprawdzamy (na przykład przy pomocy komputera), że wszystkie takie liczby spełniają tezę. ⊠

Jeśli liczba n jest potęgą dziesiątki, to oczywiście proces opisany w 4.3.1 doprowadzi nas do liczby 1. Istnieją również inne liczby naturalne, dla których ten proces doprowadzi nas do jedynki.

4.3.2. *Przykłady bezzerowych liczb naturalnych, dla których proces opisany w* 4.3.1 *doprowadza do jedynki.*

112, 778,
1189, 1234, 1579, 2779,
13369, 13477, 13669, 14479, 14788, 15778, 16699, 17779, 17899,
22558, 33679, 34777, 44569, 45577, 55558, 56677, 67789, 77779,
111334, 111379, 111469, 111667, 111688, 111778,
114577, 114589, 114889, 115579, 115678, 115999, 116677,
122779, 123679, 123778, 124669, 124777, 126667, 126778,
136699, 136999, 137899, 156799, 167779,
222568, 223888, 225559, 233479, 235777, 255889, 257779, 266677,
333478, 334489, 334678, 337789, 344449, 344467, 344488, 346699, 346789, 366667,
444469, 444688, 445678, 446779, 446899, 666667.

Każda liczba powstała przez permutację cyfr powyższych liczb również ma rozważaną własność. (Maple).

4.3.3. *Jeśli n jest liczbą naturalną podzielną przez* 3*, to proces opisany w* 4.3.1 *doprowadzi nas zawsze do liczby* 153*.* ([MM] 40(4)(1967) s.227).

4.3.4. *Największą liczbą naturalną n taką, że suma sześcianów jej cyfr jest większa od n jest $n = 1999$.* ([Crux] 2000 s.163).

4.3.5. *Napiszmy dowolną liczbę naturalną w trójkowym układzie pozycyjnym i obliczmy sumę sześcianów cyfr tej liczby w tym układzie. Z otrzymaną liczbą zróbmy to samo i postępujmy w ten sam sposób dalej. Proces ten doprowadzi nas zawsze do jednej z liczb:* 1*,* 2 *lub* 18*.* ([OM] W.Brytania 1999).

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

4.4 Suma bikwadratów cyfr

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

4.4.1. *Proces polegający na obliczaniu sumy czwartych potęg cyfr liczby naturalnej doprowadzi nas zawsze do jednej z liczb:* 1*,* 1138*,* 1634*,* 2178*,* 8208*,* 9474*.*

Dowód jest podobny do dowodów twierdzeń 4.1.1 i 4.3.1. Z dowodu wynikają następujące interesujące równości.

4.4.2. $1^4 + 6^4 + 3^4 + 4^4 = 1634$, $8^4 + 2^4 + 0^4 + 8^4 = 8208$, $9^4 + 4^4 + 7^4 + 4^4 = 9474$.

Jeśli liczba n jest potęgą dziesiątki, to oczywiście proces opisany w 4.4.1 doprowadzi nas do liczby 1. Istnieją również inne liczby naturalne, dla których ten proces doprowadzi nas do jedynki.

4.4.3. *Przykłady bezzerowych liczb naturalnych, dla których proces opisany w* 4.4.1 *doprowadza do jedynki.*

11123, 44688,
233689, 444779,
2446688, 2566778, 3444589,
11244788, 11346688, 12266688, 22233489, 22455788, 22666777, 23444679, 23556688, 33446669.

Każda liczba powstała przez permutację cyfr powyższych liczb również ma rozważaną własność. (Maple).

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

4.5 Suma piątych potęg cyfr

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

4.5.1. *Proces polegający na obliczaniu sumy piątych potęg cyfr liczby naturalnej doprowadzi nas zawsze do jednej z liczb:* 1*,* 244*,* 4150*,* 4151*,* 8294*,* 8299*,* 9044*,* 9045*,* 10933*,* 24584*,* 54748*,* 58618*,* 89883*,* 92727*,* 93084*,* 194979*.*

Dowód jest podobny do dowodów twierdzeń 4.1.1 i 4.3.1. Z dowodu wynikają następujące interesujące równości.

4.5.2.

$$\begin{aligned} 4^5+1^5+5^5+0^5 &= 4150,\\ 4^5+1^5+5^5+1^5 &= 4151,\\ 5^5+4^5+7^5+4^5+8^5 &= 54748,\\ 9^5+2^5+7^5+2^5+7^5 &= 92727,\\ 9^5+3^5+0^5+8^5+4^5 &= 93084,\\ 1^5+9^5+4^5+9^5+7^5+9^5 &= 194979. \end{aligned}$$

Innych równości tego typu nie ma.

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

4.6 Sumy, cyfry i wielomiany

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

Załóżmy, że

$$f(x) = a_s x^s + a_{s-1}x^{s-1} + \cdots + a_1 x^1 + a_0$$

jest wielomianem jednej zmiennej x, którego współczynniki $a_s \neq 0, a_{s-1}, \dots, a_1, a_0$, są nieujemnymi liczbami całkowitymi. Przy pomocy tego wielomianu definiujemy funkcję F, działającą ze zbioru liczb naturalnych do zbioru liczb naturalnych. Robimy to w następujący sposób. Niech n będzie daną liczbą naturalną. Niech $c_1, c_2, \dots, c_k$ będą cyframi (w dziesiątkowym układzie pozycyjnym) liczby n. Wówczas przyjmujemy:

$$F(n) = f(c_1) + f(c_2) + \cdots + f(c_k).$$

Na przykład, jeśli $f(x) = 3x^2+9$, to $F(201) = f(2)+f(0)+f(1) = 21+9+12 = 42$.

Mając daną liczbę naturalną n, obliczmy $F(n)$. Z otrzymaną liczbą zróbmy to samo i postępujmy w ten sam sposób dalej. Otrzymamy wówczas ciąg:

$$n,\ F(n),\ F(F(n)),\ F(F(F(n))),\ \cdots.$$

Każdy ciąg takiej postaci nazwijmy *f-ciągiem*. Dla przykładu, następujące dwa ciągi są f-ciągami dla $f(x) = 3x^2+9$.

201, 42, 78, 357, 276, 294, 330, 81, 213, 69, 369, 405, 150, 105, 105,...
741, 225, 126, 150, 105, 105, 105,...

Pierwszy z tych ciągów powstał dla $n = 201$, a drugi dla $n = 899$. W jednym i drugim ciągu pojawiła się liczba 105, która powtarza się bezustannie. To nie jest przypadek. Okazuje się, że jeśli $f(x) = 3x^2+9$, to w każdym f-ciągu pojawi się liczba 105. Łatwo to udowodnić. Dowód jest podobny do dowodów twierdzeń 4.1.1 i 4.3.1. Widzimy więc, że istnieją takie wielomiany $f(x)$, że w każdym f-ciągu występuje zawsze ta sama liczba naturalna m_f. Oto kilka przykładów takich wielomianów $f(x)$ wraz z ich liczbą m_f.

$f(x)$	m_f	$f(x)$	m_f
$2x+2$	14	$2x^2+2x+1$	191
$3x$	27	$3x^2+9$	105
$3x+1$	26	$3x^2+3x+4$	162
$3x+2$	25	$3x^2+6x+5$	273
$6x$	54	$5x^2+5x$	10
$6x+5$	52	$6x^2+6x+6$	426

Do tej pory rozważaliśmy tylko dziesiątkowy układ pozycyjny. Przy definiowaniu f-ciągów wykorzystaliśmy funkcję F zdefiniowaną przy pomocy cyfr układu dziesiętnego. Podobną funkcję F możemy zdefiniować wykorzystując cyfry dowolnego ustalonego systemu pozycyjnego. Otrzymamy wówczas nowe f-ciągi, które również posiadają ciekawe własności. Jeśli, na przykład, $f(x) = 8x^2 + 5x + 7$ i ustalonym systemem pozycyjnym jest system trójkowy, to w każdym f-ciągu występuje liczba, której zapisem dziesiętnym jest 145. Jeśli natomiast $f(x) = 2x^2+5$ i ustalonym systemem jest system siódemkowy, to w każdym f-ciągu występuje 81 lub 25, lub 145.

W dalszym ciągu rozpatrywać będziemy tylko dziesiętny system numeracji. Dla danego wielomianu f wszystkie f-ciągi są od pewnego miejsca okresowe i liczba wszystkich możliwych okresów jest skończona (wynika to z ogólniejszego faktu 4.7.6). Każdy taki okres nazywać będziemy *f-okresem.* Podamy teraz wszystkie f-okresy dla pewnych wielomianów f. Okresy te są wypisane w nawiasach kwadratowych.

4.6.1. *Wszystkie f-okresy dla pewnych wielomianów $f(x)$ postaci $x + a$.*

(1) $f(x) = x + 0$; [1], [2], [3], [4], [5], [6], [7], [8], [9].

(2) $f(x) = x + 1$; $[3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10]$.

(3) $f(x) = x + 2$; $[5, 7, 9, 11, 6, 8, 10]$.

(4) $f(x) = x + 3$; $[9, 12]$, $[7, 10]$, $[8, 11]$.

(5) $f(x) = x + 4$; $[9, 13, 12, 11, 10]$.

(6) $f(x) = x + 5$; $[12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20]$.

(7) $f(x) = x + 6$; $[15, 18, 21]$, $[16, 19, 22]$, $[14, 17, 20]$.

(8) $f(x) = x + 7$; $[16, 21, 17, 22, 18, 23, 19, 24, 20]$.

(9) $f(x) = x + 8$; $[18, 25, 23, 21, 19, 26, 24, 22, 20]$.

(10) $f(x) = x + 9$; [20], [21], [22], [23], [24], [25], [26], [27], [28], [29].

(11) $f(x) = x + 10$; $[23, 25, 27, 29, 31, 24, 26, 28, 30]$. (Maple).

4.6.2. *Wszystkie f-okresy dla pewnych wielomianów $f(x)$ postaci $ax + b$.*

(1) $f(x) = 5x + 7$; [64], $[79, 94]$.

(2) $f(x) = 5x + 13$; $[76, 91]$, [61].

(3) $f(x) = 5x + 19$; $[97, 118, 107]$.

(4) $f(x) = 5x + 21$; [108], $[88, 122]$. (Maple).

4.6.3. *Wszystkie wielomiany f postaci $ax+b$, gdzie $1 \leqslant a \leqslant 20$, $0 \leqslant b \leqslant 20$, których wszystkie f-ciągi posiadają dokładnie jeden okres długości 1. W nawiasach kwadratowych podano jedyny okres.*

(1) $2x + 2$, [14].

(2) $3x$, [27]; $3x+1$, [26]; $3x+2$, [25]; $3x+3$, [24]; $3x+4$, [23]; $3x+8$, [46]; $3x+9$, [45]; $3x+10$, [44]; $3x+11$, [43]; $3x + 15$, [66]; $3x + 16$, [65]; $3x + 17$, [64]; $3x + 18$, [63];

(3) $6x$, [54]; $6x + 2$, [64]; $6x + 5$, [52]; $6x + 7$, [62]; $6x + 9$, [72];

(4) $7x+13, [109]$;

(5) $9x, [81]$; $9x+10, [138]$; $9x+18, [135]$; $9x+19, [165]$;

(6) $11x+2, [138]$.

(7) $12x, [108]$; $12x+9, [135]$; $12x+10, [174]$; $12x+12, [144]$; $12x+13, [183]$; $12x+14, [114]$; $12x+15, [153]$; $12x+16, [192]$; $12x+17, [123]$; $12x+18, [162]$; $12x+20, [132]$;

(8) $14x+5, [183]$.

(9) $15x, [135]$; $15x+1, [183]$; $15x+4, [192]$; $15x+12, [171]$; $15x+13, [219]$; $15x+15, [180]$; $15x+16, [228]$;

(10) $18x, [162]$; $18x+3, [171]$; $18x+4, [228]$; $18x+6, [180]$; $18x+10, [246]$; $18x+11, [141]$; $18x+13, [255]$; $18x+14, [150]$; (Maple).

4.6.4. *Wszystkie wielomiany f postaci $ax+b$, gdzie $1 \leqslant a \leqslant 20$, $0 \leqslant b \leqslant 20$, których wszystkie f-ciągi posiadają dokładnie jeden okres długości 2. W nawiasach kwadratowych podano jedyny okres.*

(1) $6x+17, [93, 106]$; $6x+20, [84, 112]$;

(2) $15x+10, [60, 110]$; $15x+18, [189, 324]$;

(3) $18x+9, [189, 351]$; $18x+12, [198, 360]$; $18x+17, [159, 321]$; $18x+20, [168, 330]$; (Maple).

4.6.5. *Wszystkie okresy f-ciągów dla pewnych wielomianów $f(x)$ postaci x^2+a.*

(1) $f(x) = x^2+0$; $[1]$, $[4, 16, 37, 58, 89, 145, 42, 20]$.

(2) $f(x) = x^2+1$; $[3, 10]$, $[28, 70, 51]$, $[7, 50, 27, 55, 52, 31, 12]$.

(3) $f(x) = x^2+2$; $[6, 38, 77, 102, 11]$, $[57, 78, 117]$, $[24]$, $[45]$, $[65]$, $[84]$.

(4) $f(x) = x^2+3$; $[14, 23, 19, 88, 134, 35, 40, 22]$, $[16, 43, 31]$.

(5) $f(x) = x^2+4$; $[38, 81, 73, 66, 80, 72, 61, 45, 49, 105]$.

(6) $f(x) = x^2+8$; $[33, 34, 41]$, $[21]$, $[81]$, $[80]$. (Maple).

4.6.6. *Wszystkie wielomiany f postaci ax^2+bx+c, gdzie $1 \leqslant a \leqslant 10$, $0 \leqslant b \leqslant 20$, $0 \leqslant c \leqslant 20$, których wszystkie f-ciągi posiadają dokładnie jeden okres długości 1. W nawiasach kwadratowych podano jedyny okres.*

(1) $x^2+6x+15, [164]$; $x^2+12x+14, [113]$; $x^2+13x+2, [218]$;

(2) $2x^2+2x+1, [191]$;

(3) $3x^2+9, [105]$; $3x^2+17, [237]$; $3x^2+3x+4, [162]$; $3x^2+6x+5, [273]$; $3x^2+15x+4, [234]$;

(4) $4x^2+2x+6, [236]$; $4x^2+10x+6, [518]$;

(5) $5x^2+5x, [10]$; $5x^2+5x+19, [647]$; $5x^2+12x+1, [856]$; $5x^2+12x+3, [982]$; $5x^2+17x+3, [461]$; $5x^2+18x+16, [203]$;

(6) $6x^2+17, [783]$; $6x^2+6x+6, [426]$; $6x^2+15x+1, [762]$; $6x^2+15x+18, [534]$; $6x^2+18x+1, [915]$; $6x^2+18x+10, [834]$;

(7) $9x^2+3x+12, [324]$;

(8) $10x^2+3x+15, [741]$. (Maple).

4.6.7. *Wszystkie wielomiany f postaci $ax^2 + bx + c$, gdzie $1 \leqslant a \leqslant 10$, $0 \leqslant b \leqslant 20$, $0 \leqslant c \leqslant 20$, których wszystkie f-ciągi posiadają dokładnie jeden okres długości 2. W nawiasach kwadratowych podano jedyny okres.*

(1) $x^2 + 4x + 9, [65, 123]$; $x^2 + 5x + 17, [165, 173]$; $x^2 + 6x + 7, [119, 170]$; $x^2 + 13x + 14, [154, 214]$;

(2) $2x^2 + 9x + 1, [108, 214]$; $2x^2 + 14x + 3, [41, 110]$;

(3) $3x^2 + 3x + 15, [171, 225]$;

(4) $4x^2 + 12x + 20, [372, 452]$;

(5) $5x^2 + 5x + 15, [685, 765]$; $5x^2 + 10x + 16, [483, 643]$;

(6) $6x^2 + 6x + 3, [309, 621]$;

(7) $9x^2 + 3, [306, 414]$; $9x^2 + 18x + 4, [682, 1236]$;

(8) $10x^2 + 18x + 2, [1288, 1680]$. (Maple).

4.6.8. *Wszystkie f-okresy dla pewnych wielomianów $f(x)$ postaci $x^3 + a$.*

(1) $f(x) = x^3 + 0$; [1], [153], [370], [371], [407], [136, 244], [919, 1459], [55, 250, 133], [160, 217, 352].

(2) $f(x) = x^3 + 2$; [283, 553], [158, 644, 350].

(3) $f(x) = x^3 + 4$; [263], [427, [865], [256, 361], [419, 806, 740]. (Maple).

4.6.9. *Wszystkie f-okresy dla pewnych wielomianów $f(x)$ postaci $x^4 + a$.*

(1) $f(x) = x^4 + 0$; [1], [1634], [9474], [8208], [2178, 6514], [1138, 4179, 9219, 13139, 6725, 4338, 4514].

(2) $f(x) = x^4 + 11$; [8318], [318, 4211], [6768, 9133], [752, 3075, 3151], [7901, 9007, 9006].

(3) $f(x) = x^4 + 13$; [2726, 3781, 6631], [2661], [2660], [1814, 4406, 1860, 5445], [6775].

(4) $f(x) = x^4 + 15$; [2895, 11358, 4879, 13374], [6719, 10319], [1614], [8990, 17278]. (Maple).

4.6.10. *Wszystkie f-okresy dla pewnych wielomianów $f(x)$.*

(1) $f(x) = x^2 - 1$; [0].

(2) $f(x) = x^2 + x$; [90], [6, 42, 26, 48, 92, 96, 132, 20].

(3) $f(x) = x^2 - x$; [0], [2], [36], [86], [6, 30].

(4) $f(x) = x^2 - x + 1$; [1], [14], [20, 4, 13, 8, 57, 64, 44, 26, 34].

(5) $f(x) = x^2 + 2x + 1$; [49, 125], [89, 181], [45, 61, 53, 52], [29, 109, 105, 41].

(6) $f(x) = x^2 + 2x$; [23], [80], [63], [35, 50], [6, 48, 104, 27, 71, 66, 96, 147, 90, 99, 198, 182, 91, 102, 11].

(7) $f(x) = x^2 + x + 1$; [64], [34], [4, 21, 10], [28, 80, 74, 78, 130, 17, 60, 44, 42], [148, 97].

(8) $f(x) = x^3 + x$; [12], [30], [870], [960], [2, 10], [738, 900], [170, 352], [266, 454], [70, 350, 160, 224, 88, 1040].

(9) $f(x) = x^3 - x$; [0], [216], [6, 210], [66, 420], [504, 180], [90, 720, 342], [552, 246, 276], [390, 744, 456].

(10) $f(x) = x^3 + x^2$; [152, 164, 334].

(11) $f(x) = x^3 - x^2$; [0], [294, 700]. (Maple).

Jeśli dla danego wielomianu $f(x)$ jest tylko jeden f-okres, to każdą liczbę występującą w tym jedynym f-okresie nazywamy *f-liczbą*. Jeśli dodatkowo ten jedyny f-okres składa się tylko z jednej liczby m, to mówimy, że m jest *pojedynczą f-liczbą*.

4.6.11. *Przykłady pewnych pojedyńczych f-liczb wraz z ich wielomianami $f(x)$.*

(1) 14, $f(x) = 2x + 2$.

(2) 23, $3x + 4$; 24, $3x + 3$; 25, $3x + 2$; 26, $3x + 1$; 27, $3x$.

(3) 43, $3x + 11$; 44, $3x + 10$; 45, $3x + 9$; 46, $3x + 8$.

(4) 52, $6x + 5$; 54, $6x$.

(5) 62, $6x + 7$; 63, $3x + 18$; 64, $3x + 17$; 64, $6x + 2$; 65, $3x + 16$; 66, $3x + 15$.

(6) 72, $6x + 9$.

(7) 81, $9x$; 83, $3x + 25$; 84, $3x + 24$; 85, $3x + 23$; 86, $3x + 22$.

(8) 105, $3x^2 + 9$; 108, $12x$; 109, $7x + 13$.

(9) 114, $3x + 32$; 114, $12x + 14$; 117, $3x + 30$.

(10) 120, $9x + 31$; 123, $3x + 35$; 123, $9x + 23$; 123, $12x + 17$; 124, $2x^2 + x + 25$; 126, $3x + 33$.

(11) 131, $4x^2 + 3x + 24$.

(12) 132, $9x + 26$, $12x + 20$, $21x + 2$, $3x^2 + 30$.

(13) 135, $3x + 36$, $9x + 18$, $12x + 9$, $15x$.

(14) 138, $9x + 10$, $11x + 2$.

(15) 141, $9x + 29$, $18x + 11$, $21x + 5$.

(16) 144, $3x + 39$, $9x + 21$, $12x + 12$.

(17) 150, $6x + 38$, $9x + 32$, $18x + 14$.

(18) 153, $3x + 42$, $6x + 33$, $12x + 15$.

(19) 156, $3x + 40$.

(20) 162, $6x + 36$, $9x + 27$, $12x + 18$, $18x$, $3x^2 + 3x + 4$.

(21) 164, $x^2 + 6x + 15$.

(22) 165, $3x + 43$, $9x + 19$.

(23) 171, $6x + 39$, $9x + 30$, $15x + 12$, $18x + 3$.

(24) 174, $3x + 46$, $9x + 22$, $12x + 10$.

(25) 180, $6x + 42$, $9x + 33$, $15x + 15$, $18x + 6$.

(26) 183, $3x + 49$, $6x + 37$, $12x + 13$, $14x + 5$, $15x + 1$. (Maple).

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

4.7 Uogólnienia f-ciągów; w-ciągi

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

Niech $w = (w_0, w_1, \dots, w_9)$ będzie ustalonym 10-wyrazowym niezerowym ciągiem nieujemnych liczb całkowitych. Rozważmy funkcję $G : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ zdefiniowaną w następujący sposób. Niech n będzie daną liczbą naturalną i niech $c_1, c_2, \dots, c_k$ będą kolejnymi cyframi (w dziesiątkowym układzie pozycyjnym) liczby n. Wówczas przyjmujemy:

$$G(n) = w_{c_1} + w_{c_2} + \cdots + w_{c_k}.$$

Na przykład, jeśli $w = (120, 0, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11)$, to

$$G(201) = w_2 + w_0 + w_1 = 4 + 120 + 0 = 124.$$

Jeśli n jest liczbą naturalną, to nieskończony ciąg

$$n,\ G(n),\ G(G(n)),\ G(G(G(n))),\ \ldots$$

nazywać będziemy *w-ciągiem liczby n*. W szczególnym przypadku, jeśli $f(x)$ jest wielomianem o nieujemnych całkowitych współczynnikach i $w_n = f(n)$ dla $n = 0, 1, \ldots, 9$, to w-ciągi są f-ciągami rozpatrywanymi w poprzednim podrozdziale. Spójrzmy na kilka przykładów.

4.7.1. *Niech $w = (21, 19, 17, 15, 13, 11, 9, 7, 5, 3)$. Dla liczb $n = 80, 81, \ldots, 88$ mamy następujące w-ciągi.*

80, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, ...
81, 24, 30, 36, 24, 30, 36, 24, 30, 36, 24, 30, 36, 24, 30, 36, ...
82, 22, 34, 28, 22, 34, 28, 22, 34, 28, 22, 34, 28, 22, 34, 28, ...
83, 20, 38, 20, 38, 20, 38, 20, 38, 20, 38, 20, 38, 20, 38, 20, ...
84, 18, 24, 30, 36, 24, 30, 36, 24, 30, 36, 24, 30, 36, 24, 30, ...
85, 16, 28, 22, 34, 28, 22, 34, 28, 22, 34, 28, 22, 34, 28, 22, ...
86, 14, 32, 32, 32, 32, 32, 32, 32, 32, 32, 32, 32, 32, 32, 32, ...
87, 12, 36, 24, 30, 36, 24, 30, 36, 24, 30, 36, 24, 30, 36, 24, ...
88, 10, 40, 34, 28, 22, 34, 28, 22, 34, 28, 22, 34, 28, 22, 34, ... (Maple).

4.7.2. *Niech $w = (0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34)$ (początkowe liczby Fibonacciego). Dla liczb $n = 80, 81, \ldots, 88$ mamy następujące w-ciągi.*

80, 21, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, ...
81, 22, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, ...
82, 22, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, ...
83, 23, 3, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, ...
84, 24, 4, 3, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, ...
85, 26, 9, 34, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, ...
86, 29, 35, 7, 13, 3, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, ...
87, 34, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, ...
88, 42, 4, 3, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, ... (Maple).

4.7.3. *Niech $w = (0, 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45)$ (początkowe liczby trójkątne). Dla liczb $n = 80, 81, \ldots, 88$ mamy następujące w-ciągi.*

80, 36, 27, 31, 7, 28, 39, 51, 16, 22, 6, 21, 4, 10, 1, 1, ...
81, 37, 34, 16, 22, 6, 21, 4, 10, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, ...
82, 39, 51, 16, 22, 6, 21, 4, 10, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, ...
83, 42, 13, 7, 28, 39, 51, 16, 22, 6, 21, 4, 10, 1, 1, 1, ...
84, 46, 31, 7, 28, 39, 51, 16, 22, 6, 21, 4, 10, 1, 1, 1, ...
85, 51, 16, 22, 6, 21, 4, 10, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, ...
86, 57, 43, 16, 22, 6, 21, 4, 10, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, ...
87, 64, 31, 7, 28, 39, 51, 16, 22, 6, 21, 4, 10, 1, 1, 1, ...
88, 72, 31, 7, 28, 39, 51, 16, 22, 6, 21, 4, 10, 1, 1, 1, ... (Maple).

4.7.4. *Niech $w = (0, 1, 4, 10, 20, 35, 56, 84, 120, 165)$ (początkowe liczby tetraedralne). Dla*

liczb $n = 80, 81, \dots, 88$ mamy następujące w-ciągi.

$80, 120, 5, 35, 45, 55, 70, 84, 140, 21, 5, 35, 45, 55, 70, 84, \dots$
$81, 121, 6, 56, 91, 166, 113, 12, 5, 35, 45, 55, 70, 84, 140, 21, \dots$
$82, 124, 25, 39, 175, 120, 5, 35, 45, 55, 70, 84, 140, 21, 5, 35, \dots$
$83, 130, 11, 2, 4, 20, 4, 20, 4, 20, 4, 20, 4, 20, 4, 20, \dots$
$84, 140, 21, 5, 35, 45, 55, 70, 84, 140, 21, 5, 35, 45, 55, 70, \dots$
$85, 155, 71, 85, 155, 71, 85, 155, 71, 85, 155, 71, 85, 155, 71, 85, \dots$
$86, 176, 141, 22, 8, 120, 5, 35, 45, 55, 70, 84, 140, 21, 5, 35, \dots$
$87, 204, 24, 24, 24, 24, 24, 24, 24, 24, 24, 24, 24, 24, 24, 24, \dots$
$88, 240, 24, 24, 24, 24, 24, 24, 24, 24, 24, 24, 24, 24, 24, 24, \dots$ (Maple).

Dla danego ciągu $w = (w_0, w_1, \dots, w_9)$ oznaczmy przez $m(w)$ największą z liczb $w_0, \dots, w_9$ i niech $s(w)$ oznacza liczbę cyfr (w układzie dziesiętnym) liczby $m(w)$. Mamy wówczas:

4.7.5. *Niech n będzie liczbą naturalną i niech k będzie liczbą jej cyfr.*

(1) *Załóżmy, że $s(w) \leqslant 8$. Jeśli $k \geqslant s(w) + 2$, to liczba cyfr liczby $G(n)$ jest mniejsza od k. W szczególności, jeśli $k \geqslant s(w) + 2$, to $G(n) < n$.*

(2) *Załóżmy, że $s(w) \leqslant 97$. Jeśli $k \geqslant s(w) + 3$, to liczba cyfr liczby $G(n)$ jest mniejsza od k. W szczególności, jeśli $k \geqslant s(w) + 3$, to $G(n) < n$.*

(3) *Załóżmy, że $s(w) \leqslant 10^p - p - 1$. Jeśli $k \geqslant s(w) + p + 1$, to liczba cyfr liczby $G(n)$ jest mniejsza od k. W szczególności, jeśli $k \geqslant s(w) + p + 1$, to $G(n) < n$.*

D. Oznaczmy: $s = s(w)$, $m = m(w)$ oraz $n' = G(n)$. Ponieważ liczba n ma k cyfr, więc $10^{k-1} \leqslant n < 10^k$. Ponadto, $10^{s-1} \leqslant m < 10^s$.

(1). Niech $s \leqslant 8$. Wtedy $s + 2 \leqslant 10$ i dla $k \geqslant s + 2$ zachodzi nierówność $k \leqslant 10^{k-(s+1)}$. Dla $k \geqslant s + 2$ mamy zatem: $n' \leqslant mk < 10^s k \leqslant 10^s 10^{k-(s+1)} = 10^{k-1} \leqslant n$.

(2). Niech $s \leqslant 97$. Wtedy $s + 3 \leqslant 10^2$ i dla $k \geqslant s + 3$ zachodzi nierówność $k \leqslant 10^{k-(s+1)}$. Dla $k \geqslant s + 3$ mamy zatem: $n' \leqslant mk < 10^s k \leqslant 10^s 10^{k-(s+1)} = 10^{k-1} \leqslant n$.

(3). Niech $s \leqslant 10^p - p - 1$. Wtedy $s + p + 1 \leqslant 10^p$ i dla $k \geqslant s + p + 1$ zachodzi nierówność $k \leqslant 10^{k-(s+1)}$. Dla $k \geqslant s + p + 1$ mamy zatem: $n' \leqslant mk < 10^s k \leqslant 10^s 10^{k-(s+1)} = 10^{k-1} \leqslant n$. ⊠

Z powyższych nierówności wynika:

4.7.6. *Niech $w = (w_0, w_1, \dots, w_9)$ będzie ustalonym ciągiem nieujemnych liczb całkowitych.*

(1) *Każdy w-ciąg jest od pewnego miejsca okresowy.*

(2) *Liczba wszystkich możliwych okresów w-ciągów jest skończona.*

(3) *Jeśli $s(w) \leqslant 10^p - p - 1$, gdzie $p \in \mathbb{N}$, to wszystkie możliwe okresy w-ciągów otrzymamy badając wszystkie w-ciągi dla liczb naturalnych n posiadających co najwyżej $s(w) + p$ cyfr.*

4.7.7. *Niech $m \in \mathbb{N}$. Niech $a(n)$ oznacza sumę m-tych potęg wszystkich cyfr liczby naturalnej n. Niech (b_n) będzie ciągiem takim, że $b_{n+1} = a(b_n)$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$. Wtedy ciąg (b_n) ma tylko skończenie wiele różnych wyrazów.* ([OM] Mołdawia 2000).

4.7.8. *Wszystkie okresy w-ciągów dla* $w = (0!, 1!, 2!, \dots, 9!)$*:*

$$[1],\ [2],\ [145],\ [40585],\ [871, 45361],\ [872, 45362],\ [169, 363601, 1454].$$

Mamy więc następujące równości:

$1! = 1;$
$2! = 2;$
$1! + 4! + 5! = 145;$
$4! + 0! + 5! + 8! + 5! = 40585;$
$8! + 7! + 1! = 45361, \quad 4! + 5! + 3! + 6! + 1! = 871;$
$8! + 7! + 2! = 45362, \quad 4! + 5! + 3! + 6! + 2! = 872;$
$1! + 6! + 9! = 363601, \quad 3! + 6! + 3! + 6! + 0! + 1! = 1454, \quad 1! + 4! + 5! + 4! = 169.$

Innych tego rodzaju równości nie ma. (Maple).

4.7.9. *Pewne okresy w-ciągów dla* $w = (1, 1^1, 2^2, \dots, 9^9)$*. W nawiasach okrągłych podano długość okresów.*

$[1], [3435], [16780890, 421845123], [3418, 16777500, 2520413](3), [873583, \dots, 1657004](8), [824599, \dots, 34424740](11), [3388, \dots, 140025](40), [3668, \dots, 53244](97).$ (Maple).

4.7.10. *Pewne okresy w-ciągów dla* $w = (0, 1^1, 2^2, \dots, 9^9)$*. W nawiasach okrągłych podano długość okresów.*

$[1], [3435], [438579088], [50119, \dots, 33601354](25), [3439, \dots, 53423](52), [288, \dots, 140023](58).$ (Maple).

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

4.8 Iloczyn cyfr

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

W tym podrozdziale przez $p(n)$ oznaczamy iloczyn cyfr liczby naturalnej n. Przykłady: $p(123) = 6$, $p(2222) = 16$, $p(5033) = 0$.

4.8.1. $p(1) + p(2) + \dots + p(100) = 45 \cdot 46.$ ([B-nu] s.111).

4.8.2. *Dla każdej liczby naturalnej n istnieje nieskończenie wiele liczb naturalnych m takich, że*

$$n = s(s(m)) + p(s(m)) + s(p(m)) + p(p(m)).$$ ([OM] Austria 1983).

4.8.3. *Jeśli* $n \geqslant 10$*, to* $p(n) < n$*.* ([Ismj]).

D. Niech $10 \leqslant n \in \mathbb{N}$ i niech $n = a_s 10^s + a_{s-1} 10^{s-1} + \dots + a_1 10 + a_0$, gdzie $a_0, \dots, a_s \in \{0, 1, \dots, 9\}$ $a_s \neq 0$. Ponieważ $n \geqslant 10$, więc $s \geqslant 1$. Mamy wtedy:

$$p(n) = a_s (a_0 a_1 \cdots a_{s-1}) \leqslant a_s 9^s < a_s 10^s \leqslant a_s 10^s + a_{s-1} 10^{s-1} + \dots + a_1 10 + a_0 = n,$$

a zatem $p(n) < n$. ⊠

4.8.4. *Jeśli* $p(n) = n^2 - 10n - 22$*, to* $n = 12$*.* ([IMO] 1968).

W definicji iloczynu $p(n)$ rozpatrywaliśmy cyfry liczby n zapisanej w systemie dziesiętnym. Można to samo zrobić dla innych systemów numeracji. Niech $2 \leqslant q \in \mathbb{N}$ i niech $p_q(n)$ oznacza iloczyn cyfr liczby naturalnej n w systemie numeracji o podstawie q.

4.8.5. *Jeśli $n \geqslant q$, to $p_q(n) < n$.*

D. Niech $q \leqslant n \in \mathbb{N}$ i niech $n = a_s q^s + a_{s-1}q^{s-1} + \cdots + a_1 q + a_0$, gdzie $a_0, \ldots, a_s \in \{0, 1, \ldots, (q-1)\}$ $a_s \neq 0$. Ponieważ $n \geqslant q$, więc $s \geqslant 1$. Mamy wtedy:

$$p_q(n) = a_s\,(a_0 a_1 \cdots a_{s-1}) \leqslant a_s(q-1)^s < a_s q^s \leqslant a_s q^s + a_{s-1}q^{s-1} + \cdots + a_1 q + a_0 = n,$$

a zatem $p_q(n) < n$. ⊠

W dalszym ciągu zajmować się będziemy tylko systemami dziesiętnymi.

Dla danej liczby naturalnej a rozpatrzmy ciąg (x_n) zdefiniowany równościami

$$\begin{cases} x_1 = a, \\ x_{n+1} = x_n + p(x_n), \quad \text{dla } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Spójrzmy na przykłady:

$$\begin{aligned} a = 1: &\quad (x_n) = (1, 2, 4, 8, 16, 22, 26, 38, 62, 74, 102, 102, 102, \ldots), \\ a = 5: &\quad (x_n) = (5, 10, 10, 10, \ldots), \\ a = 9: &\quad (x_n) = (9, 18, 26, 38, 62, 74, 102, 102, 102, \ldots). \end{aligned}$$

Wszystkie ciągi z tych przykładów się stabilizują; są ograniczone. Wykażemy, że tak jest zawsze.

4.8.6. *Dla każdej liczby naturalnej a powyższy ciąg (x_n) się stabilizuje.* ([OM] ZSRR 1980).

D. ([Bryn] 1.18). Najpierw zauważmy, że istnieje taka liczba naturalna u, że

$$9^{n+1} < 10^n, \quad \text{dla } n \geqslant u.$$

Wynika to na przykład z tego, że ciąg $9\left(\frac{9}{10}\right)^n$ jest zbieżny do zera.

Istnieje zatem taka liczba nauralna s, że $9^s < 10^{s-1}$ oraz $a < 10^s$. Jeśli wszystkie wyrazy x_n są mniejsze od 10^s, to ciąg (x_n) się stabilizuje, gdyż wtedy jest to ciąg ograniczony. Załóżmy więc, że istnieje takie n, że $x_n < 10^s$ oraz $x_{n+1} \geqslant 10^s$. Mamy wtedy:

$$10^s \leqslant x_{n+1} = x_n + p(x_n) < 10^s + p(x_n) \leqslant 10^s + 9^s < 10^s + 10^{s-1}.$$

Z nierówności $10^s < x_{n+1} < 10^s + 10^{s-1}$ wynika, że początkową cyfrą liczby x_{n+1} jest 1 i następną cyfrą jest 0. Iloczyn cyfr liczby x_{n+1} jest więc równy zero. Zatem $x_{n+1} = x_{n+2} = x_{n+3} = \ldots$; ciąg (x_n) się stabilizuje. ⊠

Niech $w(a)$ oznacza liczbę wszystkich parami różnych wyrazów rozpatrywanego ciągu (x_n), którego wyrazem pierwszym jest liczba naturalna a. Z powyższych przykładów podanych dla $a = 1$, $a = 5$ oraz $a = 9$ widzimy, że $w(1) = 11$, $w(5) = 2$ oraz $w(9) = 7$. W tabeli

podano wszystkie liczby $w(a)$ dla $1 \leqslant a \leqslant 100$,

a	w	a	w	a	w	a	w	a	w	a	w	a	w	a	w	a	w	a	w
1	11	11	9	21	6	31	4	41	5	51	6	61	3	71	5	81	5	91	2
2	10	12	8	22	6	32	5	42	2	52	4	62	3	72	5	82	3	92	2
3	10	13	8	23	5	33	3	43	3	53	9	63	6	73	3	83	2	93	2
4	9	14	7	24	6	34	3	44	2	54	3	64	6	74	2	84	8	94	2
5	2	15	2	25	3	35	2	45	4	55	2	65	3	75	2	85	4	95	2
6	9	16	7	26	5	36	4	46	2	56	5	66	2	76	7	86	4	96	2
7	8	17	7	27	6	37	4	47	3	57	3	67	2	77	6	87	4	97	2
8	8	18	6	28	3	38	4	48	2	58	3	68	8	78	4	88	5	98	2
9	7	19	4	29	4	39	3	49	5	59	2	69	6	79	3	89	4	99	2
10	1	20	1	30	1	40	1	50	1	60	1	70	1	80	1	90	1	100	1

Zauważmy, że $w(a) \leqslant 11$ dla $a \leqslant 100$. Sprawdzono (za pomocą Maple), że $w(187) = w(248) = w(264) = 28$. Jeśli $a \leqslant 10^6$, to $w(a) \leqslant 28$. Ponadto, $w(a) = 33$ dla $a = 3\,515\,987$, $w(a) = 34$ dla $a = 22\,572\,473$ oraz $w(a) \leqslant 34$ dla $a < 5 \cdot 10^8$, $w(a) = 35$ dla $a = 518\,376\,965$, $w(a) = 36$ dla $a = 516\,675\,965$ oraz $w(a) = 37$ dla $a = 516\,963\,965$ i $w(a) \leqslant 37$ dla $a \leqslant 10^9$.

Nie znam odpowiedzi na pytanie:

4.8.7. *Czy ciąg* $(w(a))_{a\in\mathbb{N}}$ *jest ograniczony?*

Niech teraz a, b będą danymi liczbami naturalnymi i niech $y(a, b)$ będzie ciągiem (y_n) zdefiniowanym równościami

$$\begin{cases} y_1 &= a, \\ y_{n+1} &= y_n + b \cdot p(y_n), \quad \text{dla } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

W szczególnym przypadku, gdy $b = 1$, ciąg $y(a, b)$ jest poprzednio rozpatrywanym ciągiem (x_n) o wyrazie pierwszym równym a. Wiemy już (patrz 4.8.6), że takie ciągi (x_n) się stabilizują. Zachodzi to również dla dowolnych ciągów postaci $y(a, b)$

4.8.8. *Każdy ciąg* $y(a, b)$ *się stabilizuje.*

D. Najpierw zauważmy, że istnieje taka liczba naturalna u, że

$$b9^{n+1} < 10^n, \quad \text{dla } n \geqslant u.$$

Wynika to na przykład z tego, że ciąg $9b\left(\frac{9}{10}\right)^n$ jest zbieżny do zera.

Istnieje zatem taka liczba nauralna s, że $b9^s < 10^{s-1}$ oraz $a < 10^s$. Jeśli wszystkie wyrazy y_n są mniejsze od 10^s, to ciąg (y_n) się stabilizuje, gdyż wtedy jest to ciąg ograniczony. Załóżmy więc, że istnieje takie n, że $y_n < 10^s$ oraz $y_{n+1} \geqslant 10^s$. Mamy wtedy:

$$10^s \leqslant y_{n+1} = y_n + b \cdot p(y_n) < 10^s + b \cdot p(y_n) \leqslant 10^s + b9^s < 10^s + 10^{s-1}.$$

Z nierówności $10^s < y_{n+1} < 10^s + 10^{s-1}$ wynika, że początkową cyfrą liczby y_{n+1} jest 1 i następną cyfrą jest 0. Iloczyn cyfr liczby y_{n+1} jest więc równy zero. Zatem $y_{n+1} = y_{n+2} = y_{n+3} = \ldots$; ciąg $y(a, b) = (y_n)$ się stabilizuje. ⊠

Niech $w(a, b)$ oznacza liczbę wszystkich parami różnych wyrazów rozpatrywanego ciągu $y(a, b)$. Na Czesko-Polsko-Słowackich Zawodach Matematycznych w 2009 pojawiło się następujące zadanie.

4.8.9. *Udowodnić, że istnieją takie liczby naturalne a i b, dla których liczba $w(a, b)$ jest równa* 2009.

4.8.10. *Niech $a_1 \in \mathbb{N}$ i niech $a_{n+1} = p(a_n)$, dla $n \in \mathbb{N}$, Jeśli a_k jest liczbą jednocyfrową (dla pewnego k), to mówimy, że a_k jest* cyfrowym pierwiastkiem *liczby a_1. Przykład: $a_1 = 24378$, $a_2 = 1344$, $a_3 = 48$, $a_4 = 32$, $a_5 = 6$; zatem 6 jest cyfrowym pierwiastkiem liczby 24378.*

(1) *Każda liczba naturalna ma dokładnie jeden cyfrowy pierwiastek.*

(2) *Cyfrowy pierwiastek jest równy 1 wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie cyfry liczby a_1 są równe 1.* ([OM] Irlandia 1992).

4.8.11. *Niech $q(n)$ oznacza iloczyn wszystkich niezerowych cyfr liczby naturalnej n. Mamy wtedy: $q(1) + q(2) + \cdots + q(999) = 46^3 - 1 = 97335$.* ([San4j]).

4.8.12. *Mówimy, że dana liczba naturalna n jest* SP*-liczbą, jeśli $n = s(n) \cdot p(n)$.*

(1) *Istnieją dokładnie dwie* SP*-liczby 3-cyfrowe:*

$$135 = (1 + 3 + 5)(1 \cdot 3 \cdot 5), \quad 144 = (1 + 4 + 4)(1 \cdot 4 \cdot 4).$$

(2) *Nie ma żadnych* SP*-liczb 4 lub 5-cio cyfrowych.*

(3) SP*-liczb istnieje tylko skończenie wiele.*

(4) *Jeśli $n \geqslant 10^{60}$, to $s(n) \cdot p(n) < n$. Stąd wynika, że* SP*-liczba ma co najwyżej 60 cyfr.*

([MG] 491(1997) 263, [MG] 493(1998) 72-75).

4.8.13. *Mówić będziemy, że dana liczba naturalna n jest Γ-liczbą, jeśli każda jej cyfra jest różna od zera oraz n dzieli $s(n) \cdot p(n)$.*

(1) *Γ-liczbą jest 15, gdyż $15 \mid 30 = (1+5)(1 \cdot 5)$. Γ-liczbą jest 18, gdyż $18 \mid 72 = (1+8)(1 \cdot 8)$. Takimi liczbami są również 24, 45, 288, 476, 864.*

(2) *Γ-liczb istnieje tylko skończenie wiele.*

(3) *Γ-liczba ma co najwyżej 60 cyfr.*

([MG] 491(1997) 263, [MG] 493(1998) 72-75).

★ A. F. Beardon, *S-P numbers*, [MG] 496(1999) 25-32.
E. Bussman, *S-P numbers in bases other than* 10, [MG] 503(2001) 245-248.
K. R. McLean, *There are only three S-P numbers*, [MG] 496(1999) 32-38.
H. A. Shah Ali, *The number of S-P numbers is finite*, [MG] 523(2008) 64-65.
I. Zawiślak, *Arytmetyczne operacje na cyfrach liczb naturalnych*, [Pmgr] 2009.

---

5 Liczby Nivena

Niech n będzie liczbą naturalną. Jeśli $s(n) \mid n$, to znaczy jeśli n jest podzielne przez sumę swoich cyfr, to mówimy, że n jest liczbą *Nivena*. Ponieważ $9 = s(45)$ dzieli 45, więc 45 jest liczbą Nivena. Tej własności nie posiada na przykład liczba 44, gdyż $8 = s(44)$ nie dzieli 44. Zatem 44 nie jest liczbą Nivena.

Liczby te tak nazwano na cześć amerykańskiego matematyka Ivana Nivena, żyjącego w latach 1915 – 1999. On badał takie liczby. Istnieją prace matematyczne, w których liczby te nazywa się liczbami *Harshada* ([S-kc], [Miss] 1995 z.85).

5.1 Przykłady liczb Nivena

5.1.1. *Lista* 300 *początkowych liczb Nivena.*

1	45	120	204	280	375	460	552	666	792	910	1016	1100	1168	1270
2	48	126	207	285	378	465	555	684	800	912	1017	1101	1170	1272
3	50	132	209	288	392	468	558	690	801	915	1020	1104	1180	1274
4	54	133	210	300	396	476	576	700	803	918	1026	1107	1183	1275
5	60	135	216	306	399	480	588	702	804	935	1032	1110	1185	1278
6	63	140	220	308	400	481	592	704	810	936	1035	1116	1188	1296
7	70	144	222	312	402	486	594	711	820	954	1040	1120	1200	1300
8	72	150	224	315	405	500	600	715	825	960	1044	1122	1204	1302
9	80	152	225	320	407	504	603	720	828	966	1050	1125	1206	1304
10	81	153	228	322	408	506	605	730	832	972	1053	1128	1212	1305
12	84	156	230	324	410	510	612	732	840	990	1056	1130	1215	1308
18	90	162	234	330	414	511	621	735	846	999	1062	1134	1220	1310
20	100	171	240	333	420	512	624	736	864	1000	1066	1140	1224	1314
21	102	180	243	336	423	513	629	738	870	1002	1071	1141	1230	1320
24	108	190	247	342	432	516	630	756	874	1008	1080	1143	1232	1323
27	110	192	252	351	440	518	640	770	880	1010	1088	1148	1233	1330
30	111	195	261	360	441	522	644	774	882	1011	1090	1152	1236	1332
36	112	198	264	364	444	531	645	777	888	1012	1092	1160	1242	1341
40	114	200	266	370	448	540	648	780	900	1014	1095	1161	1251	1344
42	117	201	270	372	450	550	660	782	902	1015	1098	1164	1260	1350

(Maple).

5.1.2. *Istnieje liczba Nivena n taka, że $s(n) = 1996$.*

D. $n = \underbrace{1996\,1996\,\dots\,1996}_{78}\,3992\,3992$. Ta liczba jest podzielna przez 1996, gdyż $3992 = 2 \cdot 1996$. Ponadto, $s(n) = 78 \cdot 25 + 2 \cdot 23 = 1996$. ⊠

5.1.3. *Dla każdego $s \in \mathbb{N}$ istnieje liczba Nivena n taka, że $s(n) = s$.* ([S64] 31, [DoC] 218).

D. Niech $s = 2^a 5^b t$, gdzie $2 \nmid t$, $5 \nmid t$. Wówczas $t \mid 10^{\varphi(t)} - 1$ i liczba $n = 10^{a+b}(10^{\varphi(t)} + 10^{2\varphi(t)} + \cdots + 10^{s\varphi(t)})$ spełnia żądane warunki. ⊠

5.1.4. *Dla każdej liczby naturalnej s niech n_s oznacza najmniejszą liczbę Nivena taką, że $s(n_s) = s$. Przykłady:* $n_{10} = 190$, $n_{11} = 209$, $n_{12} = 48$, $n_{13} = 247$, $n_{14} = 266$, $n_{15} = 195$, $n_{16} = 448$, $n_{17} = 476$, $n_{18} = 198$, $n_{19} = 874$, $n_{20} = 9920$, $n_{21} = 399$, $n_{22} = 2398$, $n_{23} = 1679$, $n_{24} = 888$, $n_{25} = 4975$, $n_{100} = 19\,999\,999\,999\,900$. ([S64] 30).

5.1.5. *Jeśli n jest pięciocyfrową liczbą Nivena taką, że $s(n) = 37$, to jej trzecią cyfrą jest 9.* ([OM] Rosja 1999).

5.1.6. *Najmniejszą liczbą Nivena n taką, że $s(n) = 34$ i $n \equiv 34 \pmod{100}$ jest $n = 198\,934$.* ([OM] St Petersburg 2001).

5.1.7. *Oznaczmy przez $A(x)$ liczbę wszystkich liczb Nivena mniejszych lub równych x.*

(1) $A(100) = 33$, $A(500) = 128$, $A(1000) = 213$, $A(10000) = 1538$, $A(100000) = 11872$. (Maple)

(2) *Dla każdego $m \in \mathbb{N}$ istnieje $n \in \mathbb{N}$ takie, że $n = A(n)m$.* ([Miss] 1995 z.85)

(3) $\lim_{n\to\infty} \frac{A(n)}{n} = 0$. (Kennedy, Cooper 1984)

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

5.2 Kolejne liczby naturalne i liczby Nivena

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

5.2.1. *Liczby $1, 2, \ldots, 10$ tworzą ciąg kolejnych liczb naturalnych, z których każda jest Nivena. Przykłady innych k kolejnych takich liczb:*

(1) $k = 2$: 20, 21 *lub* 80, 81;

(2) $k = 3$: 110, 111, 112 *lub* 1010, 1011, 1012;

(3) $k = 4$: 510, 511, 512, 513 *lub* 1014, 1015, 1016, 1017.

(4) $k = 5$: 131052, 131053, 131054, 131055, 131056 *lub* 491424, 491425, 491426, 491427, 491428. *Dla $k = 5$ są to wszystkie przykłady wśród liczb mniejszych od miliona.*

(5) $k = 6$: *nie ma takich ciągów wśród liczb mniejszych od* 10 000 000. (Maple).

5.2.2. *Ciąg kolejnych liczb naturalnych Nivena ma długość co najwyżej 20. Istnieje taki ciąg o długości 20; wszystkie liczby w tym ciągu mają 44 363 342 786 cyfr.* (Kennedy, Cooper 1993, B. Wilson 1996 [MR] 97a:11021).

5.2.3. *Wśród 18 kolejnych trzycyfrowych liczb naturalnych istnieje liczba Nivena.* ([OM] Indie 1995, [Tao] 11).

5.2.4. *Istnieje ciąg 17 kolejnych trzycyfrowych liczb naturalnych, z których każda nie jest liczbą Nivena. Takimi ciągami są:* $(558, 559, \ldots, 576)$, $(666, 667, \ldots, 684)$, $(736, 737, \ldots, 756)$, $(846, 847, \ldots, 864)$, $(972, 973, \ldots, 990)$. (Maple).

5.2.5. *Przykłady ciągów k kolejnych liczb naturalnych nie będących liczbami Nivena.*

$k = 31$,	$3785 - 3815$;	$k = 59$,	$297865 - 297923$;
$k = 35$,	$6481 - 6515$;	$k = 65$,	$478765 - 478829$;
$k = 43$,	$19873 - 19915$;	$k = 71$,	$589861 - 589931$;
$k = 44$,	$28972 - 29015$;	$k = 87$,	$989868 - 989954$.
$k = 53$,	$38773 - 38825$;	(Maple).	

---

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

5.3 Liczby Nivena specjalnego typu

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

5.3.1. *W zbiorze* $\{n^2;\ n \leqslant 1000\}$ *istnieją dokładnie* 232 *liczby Nivena.* $16 = 4^2$ *jest najmniejszą taką liczbą kwadratową, która nie jest liczbą Nivena.* (Maple).

5.3.2. *W ciągu* $(t_1, t_2, \ldots, t_{1000})$*, kolejnych liczb trójkątnych, jest* 260 *liczb Nivena. Najmniejszą liczbą trójkątną nie-Nivena jest* $t_5 = 15$. (Maple).

5.3.3. *W zbiorze* $\{n^3;\ n \leqslant 1000\}$ *jest dokładnie* 208 *liczb Nivena. Najmniejszą liczbą sześcienną nie-Nivena jest* $4^3 = 64$. (Maple).

5.3.4. *Potęgi dwójki Nivena:*

$$2^1,\ 2^2,\ 2^3,\ 2^9,\ 2^{36},\ 2^{85},\ 2^{176},\ 2^{194},\ 2^{200},\ 2^{375},\ 2^{1517},\ 2^{1523},\ 2^{3042}.$$

Są to wszystkie takie liczby $\leqslant 2^{5000}$. (Maple).

5.3.5. *Czy istnieje nieskończenie wiele liczb Nivena postaci* 2^n*? Odpowiedź na to pytanie nie jest znana.* ([S-kc]).

5.3.6. *Potęgi trójki Nivena:*

$$3^1, 3^2, 3^3, 3^4, 3^5, 3^9, 3^{10}, 3^{11}, 3^{13}, 3^{16}, 3^{17}, 3^{21}, 3^{27}, 3^{31}, 3^{35}, 3^{36}, 3^{39}, 3^{114}, 3^{119}, 3^{973}.$$

Są to wszystkie takie liczby $\leqslant 3^{1000}$. (Maple).

5.3.7. *Potęgi piątki Nivena:*

$$5^1,\ 5^8,\ 5^{208},\ 5^{977},\ 5^{1007}.$$

Są to wszystkie takie liczby $\leqslant 5^{2000}$. (Maple).

5.3.8. *Wśród liczb Mersenne'a* $M_n = 2^n - 1$ *dla* $n \leqslant 2000$ *istnieje dokładnie* 27 *liczb Nivena.* (Maple).

5.3.9. *W zbiorze wszystkich liczb Fibonacciego* u_n *dla* $n \leqslant 5000$ *istnieje dokładnie* 66 *liczb Nivena. Najmniejszą liczbą Fibonacciego nie-Nivena jest* u_7. (Maple).

5.3.10 (Kennedy, Goodman, Best 1980)**.** *Najmniejszą liczbą postaci* $n!$*, która nie jest liczbą Nivena, jest* $432!$. ([S-kc]).

5.3.11. *Dla każdej liczby naturalnej* n *istnieje bezzerowa* n*-cyfrowa liczba Nivena.* ([IMO] Shortlist 1998, [Djmp] 299(640)).

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

5.4 Liczby Nivena o danym ilorazie

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

Dla danej liczby naturalnej m rozważmy zbiór

$$\mathcal{N}(m) = \{n \in \mathbb{N};\ n = ms(n)\}.$$

5.4.1. *Jedynym elementem zbioru* $\mathcal{N}(11)$ *jest liczba* 198. *Innymi słowy: jeśli* $n = 11s(n)$, *to* $n = 198$. ([OM] Słowenia 1998).

5.4.2. *Zbiór* $\mathcal{N}(m)$ *jest skończony (może być pusty).*

5.4.3. *Zbiór* $\mathcal{N}(62)$ *jest pusty. Jeśli* m *należy do zbioru* $\{62, 63, 65, 75, 84, 95\}$, *to* $\mathcal{N}(m)$ *jest zbiorem pustym.*

5.4.4. *Elementy zbiorów postaci* $\mathcal{N}(m)$ *dla* $1 \leqslant m \leqslant 18$.

$$\begin{array}{lll} \mathcal{N}(1) &=& \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}, \\ \mathcal{N}(2) &=& \{18\}, \\ \mathcal{N}(3) &=& \{27\}, \\ \mathcal{N}(4) &=& \{12,24,36,48\}, \\ \mathcal{N}(5) &=& \{45\}, \\ \mathcal{N}(6) &=& \{54\}, \\ \mathcal{N}(7) &=& \{21,42,63,84\}, \\ \mathcal{N}(8) &=& \{72\}, \\ \mathcal{N}(9) &=& \{81\}, \end{array} \qquad \begin{array}{lll} \mathcal{N}(10) &=& \{10,20,30,40,50,60,70,80,90\}, \\ \mathcal{N}(11) &=& \{198\}, \\ \mathcal{N}(12) &=& \{108\}, \\ \mathcal{N}(13) &=& \{117,156,195\}, \\ \mathcal{N}(14) &=& \{126\}, \\ \mathcal{N}(15) &=& \{135\}, \\ \mathcal{N}(16) &=& \{144,192,288\}, \\ \mathcal{N}(17) &=& \{153\}, \\ \mathcal{N}(18) &=& \{162\}. \end{array}$$

(Maple).

5.4.5. *Elementy zbiorów postaci* $\mathcal{N}(m)$ *dla* $19 \leqslant m \leqslant 30$.

$$\begin{array}{lll} \mathcal{N}(19) &=& \{114,133,152,171,190,209,228,247,266,285,399,\}, \\ \mathcal{N}(20) &=& \{180\}, \\ \mathcal{N}(21) &=& \{378\}, \\ \mathcal{N}(22) &=& \{132,264,396\}, \\ \mathcal{N}(23) &=& \{207\}, \\ \mathcal{N}(24) &=& \{216\}, \\ \mathcal{N}(25) &=& \{150,225,377\}, \\ \mathcal{N}(26) &=& \{234,468\}, \\ \mathcal{N}(27) &=& \{243,486\}, \\ \mathcal{N}(28) &=& \{112,140,224,252,280,308,336,364,392,448,476,588\}, \\ \mathcal{N}(29) &=& \{261\}, \\ \mathcal{N}(30) &=& \{270\} \end{array}$$

(Maple).

5.4.6. $\mathcal{N}(37) = \{518, 592, 629, 666, 999, 222, 777, 111, 333, 888, 407, 370, 444, 481, 555\}$. (Maple).

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

5.5 Literatura dodatkowa

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

★ C. Cooper, R. E. Kennedy, *Niven numbers, Smith numbers, and digital sums*, [Cmj] 1989, 17-23.

R. E. Kennedy, C. Cooper, *On the natural density of Niven numbers*, [Cmj] 15(1984) 309-312.

R. E. Kennedy, C. Cooper, *On consecutive Niven numbers*, [FQ] 31(1993) 146-151.

R. E. Kennedy, T. A. Goodman, C. Best, *Mathematical discovery and Niven numbers*, [MaJ] 14(1980), 21-25.

A. Kitlińska, *Liczby Nivena*, [Pmgr] 2009.

B. Wilson, *Construction of small consecutive Niven numbers*, [FQ] 34(1996) 240-243.

6 Początkowe cyfry

Rozpatrzmy system numeracji o podstawie $q \geqslant 2$. Załóżmy, że dana liczba naturalna m ma s cyfr w tym systemie. Mówić będziemy, że liczba naturalna a jest (m,q)*-liczbą*, jeśli liczba utworzona z s początkowych cyfr (w systemie numeracji o podstawie q) liczby a jest równa m.

Jeśli system numeracji jest dziesiętny, to $(m,10)$-liczby nazywać będziemy m*-liczbami.* Dla przykładu jeśli $m = 123$, to każda z liczb 123, 12345, 1235555, jest m-liczbą. Liczba 54321 jest 5-liczbą, 54-liczbą, 543-liczbą, itd.

Przypuśćmy, że dany jest ciąg (a_n) liczb naturalnych i dana jest liczba naturalna m. Interesować nas będą głównie następujące pytania.

1. *Czy w ciągu (a_n) istnieje m-liczba?*
2. *Czy w ciągu (a_n) istnieje nieskończenie wiele m-liczb?*
3. *Analogiczne pytania dla dowolnego systemu numeracji.*

W szczególności interesować nas będą odpowiedzi na następujące pytania. Czy istnieje liczba kwadratowa rozpoczynająca się cyframi $1,2,3,4,5$? Czy istnieje liczba pierwsza (lub liczba postaci $n!$ lub postaci 2^n) rozpoczynająca się tymi cyframi?

6.1 Ogólne fakty o (m,q)-liczbach

6.1.1. *Niech $m,q,a \in \mathbb{N}$, $q \geqslant 2$. Następujące warunki są równoważne.*

(1) *Liczba a jest (m,q)-liczbą.*

(2) *Istnieje nieujemna liczba całkowita k taka, że $mq^k \leqslant a < (m+1)q^k$.*

D. Niech $m = m_rq^r + m_{r-1}q^{r-1} + \cdots + m_1q^1 + m_0$, gdzie $m_0,\dots,m_r \in \{0,1,\dots,q-1\}$.

(1) $\Rightarrow$ (2). Załóżmy, że a jest (m,q)-liczbą. Wtedy

$$a = m_rq^{r+k} + m_{r-1}q^{r-1+k} + \cdots + m_1q^{1+k} + m_0q^k + a_{k-1}q^{k-1} + \cdots + a_1q^1 + a_0,$$

gdzie $k \geqslant 0$ i jeśli $k > 0$, to $a_0,\dots,a_{k-1} \in \{0,1,\dots,q-1\}$. Jeśli $k=0$, to $a=m$ i wtedy oczywiście $mq^0 \leqslant a < (m+1)q^0$. Załóżmy, że $k>0$. i oznaczmy $b := a_{k-1}q^{k-1} + \cdots + a_1q^1 + a_0$. Wtedy $0 \leqslant b < q^k$ oraz $a = mq^k + b$. Mamy więc: $mq^k \leqslant a < mq^k + q^k = (m+1)q^k$.

(2) $\Rightarrow$ (1). Załóżmy, że $mq^k \leqslant a < (m+1)q^k$. Wtedy $a = mq^k + b$, gdzie $0 \leqslant b < q^k$. Liczba b jest postaci $a_{k-1}q^{k-1} + \cdots + a_1q^1 + a_0$, gdzie $a_0,\dots,a_{k-1} \in \{0,1,\dots,q-1\}$. Zatem $a = m_rq^{r+k} + \cdots + m_1q^{1+k} + m_0q^k + a_{k-1}q^{k-1} + \cdots + a_1q^1 + a_0$, czyli a jest (m,q)-liczbą. ⊠

W szczególności dla $q = 10$ mamy:

6.1.2. *Niech $m,a \in \mathbb{N}$. Następujące warunki są równoważne.*

(1) *Liczba a jest m-liczbą.*

(2) *Istnieje nieujemna liczba całkowita k taka, że $m10^k \leqslant a < (m+1)10^k$.*

Drobne modyfikacje dowodu faktu 6.1.1 pozwalają wykazać następującą wersję tego faktu dla liczb rzeczywistych.

6.1.3. *Niech $m, q \in \mathbb{N}$, $q \geqslant 2$, $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$. Następujące warunki są równoważne.*

(1) *Początkowe cyfry rozwinięcia w systemie numeracji o podstawie q liczby a są odpowiednio równe cyfrom liczby m zapisanej w tym systemie numeracji.*

(2) *Istnieje nieujemna liczba całkowita k taka, że $mq^k \leqslant a < (m+1)q^k$.*

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

6.2 Twierdzenia o granicach

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

6.2.1 (W. Pompe)**.** *Dany jest rosnący ciąg (a_n) liczb dodatnich rozbieżny do nieskończoności oraz dane są liczby naturalne m i q, przy czym $q \geqslant 2$. Jeśli*

$$\lim_{n\to\infty} \tfrac{a_{n+1}}{a_n} < 1 + \tfrac{1}{m},$$

to ciąg (a_n) zawiera nieskończenie wiele wyrazów, których początkowe cyfry rozwinięcia w systemie o podstawie q są odpowiednio równe cyfrom rozwinięcia w systemie o podstawie q liczby m. ([Dlt] 3/1998).

D. (W. Pompe [Dlt] 3/1998). Na mocy ciągłości i monotoniczności funkcji logarytmicznej dana nierówność jest równoważna nierówności

$$\lim_{n\to\infty} (\log_q a_{n+1} - \log_q a_n) < log_q(m+1) - \log_q m.$$

Istnieje więc liczba naturalna n_0 taka, że dla wszystkich $n \geqslant n_0$ zachodzi nierówność $\log_q a_{n+1} - \log_q a_n < \log_q(m+1) - \log_q m$, czyli

$$\log_q a_{n+1} < \log_q a_n + \log_q(m+1) - \log_q m.$$

Niech $s := \left[\log_q a_{n_0+1} - \log_q m\right] + 1$. Wtedy dla wszystkich n większych od pewnego n_1 (większego od n_0) zachodzi nierówność $s + \log_q m \leqslant \log_q a_{n+1}$. Spośród wszystkich takich n wybierzmy n najmniejsze. Wówczas $\log_q a_n < s + \log_q m$. Mamy zatem $s + \log_q m < \log_q a_{n+1} < \log_q a_n + \log_q(m+1) - \log_q m < s + \log_q m + \log_q(m+1) - \log_q m = s + \log_q(m+1)$, czyli

$$s + \log_q m < \log_q a_{n+1} < s + \log_q(m+1).$$

Zatem $mq^s < a_{n+1} < (m+1)q^s$ i stąd wynika, że początkowe cyfry (w systemie o podstawie q) wyrazu $u := a_{n+1}$ są odpowiednio równe cyfrom rozwinięcia w systemie o podstawie q liczby m.

Ponieważ ciąg (a_n) jest rosnący, więc rozpatrując podciąg tego ciągu składający się z wszystkich wyrazów większych od u otrzymamy - na mocy powyższego rozumowania - następny wyraz ciągu posiadający żądaną własność. Powtarzając ten proces stwierdzamy, że takich wyrazów istnieje nieskończenie wiele. ⊠

W powyższym twierdzeniu wyrazami danego ciągu (a_n) mogą być dowolne dodatnie liczby rzeczywiste. Stosując to dla ciągów o wyrazach naturalnych otrzymujemy:

6.2.2. *Dany jest rosnący ciąg (a_n) liczb naturalnych oraz dane są liczby naturalne m i q, przy czym $q \geqslant 2$. Jeśli*

$$\lim_{n\to\infty} \tfrac{a_{n+1}}{a_n} < 1 + \tfrac{1}{m},$$

to w ciągu (a_n) istnieje nieskończenie wiele (m, q)-liczb.

W szczególności dla $q = 10$ twierdzenie to ma następującą postać.

6.2.3. *Dany jest rosnący ciąg* (a_n) *liczb naturalnych oraz dana jest liczba naturalna* m. *Jeśli*

$$\lim_{n\to\infty} \tfrac{a_{n+1}}{a_n} < 1 + \tfrac{1}{m},$$

to w ciągu (a_n) *istnieje nieskończenie wiele* m*-liczb.*

W pewnych dowodach następnych faktów wykorzystamy różne warianty znanego twierdzenia Kroneckera o zbiorach gęstych (patrz na przykład: [HW4] 375; [Kw] 12(1974) 28, 72; [Kw] 7(1986) 6; [Dlt] 6(2001)).

6.2.4 (Twierdzenie Kroneckera)**.** *Jeśli* γ *jest liczbą niewymierną, to zbiór*

$$\Big\{a\gamma + b;\ \ a, b \in \mathbb{Z}\Big\}$$

jest gęstym podzbiorem zbioru liczb rzeczywistych.

Dowód dokładnie takiego twierdzenia Kroneckera znajduje się w [N15], w rozdziale " *Gęste podzbiory zbioru liczb rzeczywistych*". Przypomnijmy, że dany podzbiór A zbioru $\mathbb{R}$ jest *gęsty*, jeśli dla dowolnych liczb rzeczywistych $x < y$ istnieje liczba rzeczywista u taka, że $u \in A$ oraz $x < u < y$.

Następne cztery twierdzenia, które przedstawiamy bez dowodów, są pewnymi wariantami powyższego twierdzenia Kroneckera.

6.2.5. *Niech* γ *będzie dodatnią liczbą niewymierną i niech* $a < b$. *Istnieje wówczas liczba naturalna* p *posiadająca następującą własność. Dla każdej liczby rzeczywistej* $x > a$ *istnieje takie* $j \in \{1, 2, \ldots, p\}$, *że liczba* $x + j\gamma$ *leży w jednym z przedziałów* (a, b), $(1 + a, 1 + b)$, $(2 + a, 2 + b), \cdots$. ([Dlt] 3(1998) 11).

6.2.6. *Niech* $\gamma_1, \ldots, \gamma_t$ *będą dodatnimi liczbami niewymiernymi i niech* $a < b$. *Istnieją wtedy liczby naturalne* n *oraz* $m_1, \ldots, m_t$ *takie, że* $a < n\gamma_j - m_j < b$ *dla wszystkich* $j = 1, 2, \ldots, t$.

6.2.7. *Niech* $\gamma_1, \ldots, \gamma_t$ *będą dodatnimi liczbami niewymiernymi i niech* $a < b$. *Istnieje wówczas liczba naturalna* p *posiadająca następującą własność. Dla każdej liczby rzeczywistej* $x > a$ *i dla każdego* $i \in \{1, \ldots, t\}$ *istnieje* $j \in \{1, 2, \ldots, p\}$ *takie, że liczba* $x + j\gamma_i$ *leży w jednym z przedziałów* (a, b), $(1 + a, 1 + b)$, $(2 + a, 2 + b), \cdots$.

6.2.8. *Niech* γ *będzie liczbą niewymierną,* δ *liczbą rzeczywistą oraz niech* u, v *będą liczbami rzeczywistymi takimi, że* $0 \leqslant u < v \leqslant 1$. *Dla każdej liczby naturalnej* n *niech* a_n *będzie liczbą tych wszystkich wyrazów ciągu*

$$\gamma + \delta,\ 2\gamma + \delta,\ 3\gamma + \delta,\ \ldots,\ n\gamma + \delta,$$

których część ułamkowa należy do przedziału $[u, v]$. *Wtedy ciąg* $\left(\frac{a_n}{n}\right)$ *posiada granicę i granica ta jest równa* $v - u$. ([Kw] 5(1978) 2-7).

6.2.9 (W. Pompe)**.** *Dany jest ciąg* (a_n) *liczb dodatnich. Jeśli istnieje granica*

$$\lim_{n\to\infty} \tfrac{a_{n+1}}{a_n} = r > 1$$

i $\log r$ *jest liczbą niewymierną, to dla dowolnej liczby naturalnej* m *w ciągu* (a_n) *występuje nieskończenie wiele wyrazów, których początkowe cyfry rozwinięcia dziesiętnego są odpowiednio równe cyfrom rozwinięcia dziesiętnego liczby* m*.* ([Dlt] 3(1998) 10).

D. ([Dlt] 3/1998). Niech $m \in \mathbb{N}$ i niech $\gamma := \log r$. Przyjmijmy

$$a := \tfrac{2}{3}\log m + \tfrac{1}{3}\log(m+1), \quad b := \tfrac{1}{3}\log m + \tfrac{2}{3}\log(m+1).$$

Wtedy $b > a$ (gdyż $b - a = \frac{1}{3}(\log(m+1) - \log m)$). Ponieważ

$$\lim_{n\to\infty}(\log a_{n+1} - \log a_n) = \log r = \gamma > 0, \tag{1}$$

ciąg $(\log a_n)$ jest rozbieżny do nieskończoności. Bez straty ogólności możemy założyć, że $\log a_n > a$. Wykorzystamy twierdzenie 6.2.5. Niech p będzie liczbą naturalną taką, jak w tym twierdzeniu. Z (1) wynika, że istnieje liczba naturalna s taka, że dla wszystkich liczb naturalnych $n \geqslant s$ zachodzi nierówność:

$$|\log a_{n+1} - \log a_n - \gamma| < \tfrac{b-a}{p}.$$

Niech $x = \log a_s$. Wtedy $x > a$. Zatem z twierdzenia 6.2.5 wynika, że istnieją liczby $k \in \mathbb{N}$ oraz $j \in \{1, 2, \ldots, p\}$ takie, że

$$k + a < \log a_s + j\gamma < k + b. \tag{2}$$

Z drugiej zaś strony, z nierówności trójkąta otrzymujemy: $|\log a_{s+j} - \log a_s - j\gamma| \leqslant |\log a_{s+j} - \log a_{s+j-1} - \gamma| + |\log a_{s+j-1} - \log a_{s+j-2} - \gamma| + \cdots + |\log a_{s+1} - \log a_s - \gamma| < j\frac{b-a}{p} \leqslant b - a$, czyli

$$-b + a < \log a_{s+j} - \log a_s - j\gamma < b - a. \tag{3}$$

Dodając stronami nierówności (2) i (3) otrzymujemy: $k + \log m < \log a_{s+j} < k + \log(m+1)$, czyli $m10^k < a_{s+j} < (m+1)10^k$. To oznacza, na mocy 6.1.3, że początkowe cyfry liczby a_{s+j} odpowiednio się pokrywają z cyframi liczby m.

Wykazaliśmy więc, że w ciągu (a_n) istnieje liczba o żądanej własności. Jest jasne, że takich liczb jest nieskończenie wiele. ⊠

Zamieniając w powyższym dowodzie wszystkie liczby 10 liczbą naturalną $q \geqslant 2$ oraz wszystkie logarytmy na logarytmy o podstawie q, otrzymujemy następującą wersję tego twierdzenia dla systemów numeracji o podstawie q.

6.2.10. *Niech* $q \geqslant 2$ *będzie liczbą naturalną. Dany jest ciąg* (a_n) *liczb dodatnich. Jeśli istnieje granica*

$$\lim \tfrac{a_{n+1}}{a_n} = r > 1$$

i $\log_q r$ *jest liczbą niewymierną, to dla dowolnej liczby naturalnej* m *w ciągu* (a_n) *występuje nieskończenie wiele wyrazów, których początkowe cyfry rozwinięcia w systemie o podstawie* q *są odpowiednio równe cyfrom rozwinięcia o podstawie* q *liczby* m*.*

Korzystając z faktu 6.2.7 i powtarzając ideę dowodu twierdzenia 6.2.9 otrzymujemy:

6.2.11. *Dane są ciągi* $\left(a_n^{(1)}\right)$, $\left(a_n^{(2)}\right), \dots, \left(a_n^{(t)}\right)$ *liczb dodatnich. Jeśli istnieją granice*

$$\lim \frac{a_{n+1}^{(1)}}{a_n^{(1)}} = r_1 > 1, \quad \dots, \quad \lim \frac{a_{n+1}^{(t)}}{a_n^{(t)}} = r_t > 1$$

i wszystkie liczby $\log r_1, \dots, \log r_t$ *są niewymierne, to dla dowolnej liczby naturalnej* m *istnieje* $n \in \mathbb{N}$ *takie, że początkowe cyfry rozwinięcia dziesiętnego każdej z liczb* $a_n^{(1)}, \dots, a_n^{(t)}$ *są odpowiednio równe cyfrom rozwinięcia dziesiętnego liczby* m.

Zamieniając wszystkie logarytmy na logarytmy o podstawie $q \geqslant 2$, otrzymujemy następującą wersję tego twierdzenia dla systemów numeracji o podstawie q.

6.2.12. *Niech* $q \geqslant 2$ *będzie liczbą naturalną. Dane są ciągi* $\left(a_n^{(1)}\right)$, $\left(a_n^{(2)}\right), \dots, \left(a_n^{(t)}\right)$ *liczb dodatnich. Jeśli istnieją granice*

$$\lim \frac{a_{n+1}^{(1)}}{a_n^{(1)}} = r_1 > 1, \quad \dots, \quad \lim \frac{a_{n+1}^{(t)}}{a_n^{(t)}} = r_t > 1$$

i wszystkie liczby $\log_q r_1, \dots, \log_q r_t$ *są niewymierne, to dla dowolnej liczby naturalnej* m *istnieje* $n \in \mathbb{N}$ *takie, że początkowe cyfry rozwinięcia w systemie numeracji o podstawie* q *każdej z liczb* $a_n^{(1)}, \dots, a_n^{(t)}$ *są odpowiednio równe cyfrom rozwinięcia w systemie numeracji o podstawie* q *liczby* m.

★ K. G. Bankow, *O pewnym twierdzeniu Kroneckera*, [Kw] 7/1986 5-7.
G. H. Hardy, E. M. Wright, *Kronecker's Theorem*, [HW4] 375-393.
K. Pióro, *Twierdzenie Kroneckera*, [Dlt] 6/2001, 12-13.
Waldemar Pompe, *O początkowych cyfrach symboli Newtona*, [Dlt] 3(1998) 10-11.

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

6.3 Początkowe cyfry ciągów wielomianowych

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

6.3.1. *Niech* $f(x)$ *będzie wielomianem należącym do* $\mathbb{Z}[x] \smallsetminus \mathbb{Z}$, *którego wiodący współczynnik jest dodatni. Niech* $m \in \mathbb{N}$. *Wówczas w ciągu* $(f(n))$ *istnieje nieskończenie wiele* m*-liczb. To samo zachodzi dla dowolnego systemu numeracji.*

D. Z założeń wynika, że $\lim\limits_{n\to\infty} f(n) = \infty$. Ciąg $(f(n))$ jest więc, począwszy od pewnego miejsca, ściśle rosnący i oczywiście $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(n+1)}{f(n)} = 1 < 1 + \frac{1}{m}$. Teza wynika zatem z 6.2.2. ⊠

6.3.2. *Niech* $f(x)$ *będzie wielomianem o dodatnim wiodącym współczynniku, należącym do* $\mathbb{Q}[x] \smallsetminus \mathbb{Q}$, *takim, że* $f(\mathbb{Z}) \subseteq \mathbb{Z}$. *Niech* $m \in \mathbb{N}$. *Wówczas w ciągu* $(f(n))$ *istnieje nieskończenie wiele* m*-liczb. To samo zachodzi dla dowolnego systemu numeracji.*

D. Z założeń wynika, że $\lim\limits_{n\to\infty} f(n) = \infty$. Ciąg $(f(n))$ jest więc począwszy od pewnego miejsca ściśle rosnący i $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(n+1)}{f(n)} = 1 < 1 + \frac{1}{m}$. Teza wynika zatem z 6.2.1. ⊠

6.3.3. *Dla każdej liczby naturalnej m istnieje nieskończenie wiele m-liczb kwadratowych. To samo zachodzi dla dowolnego systemu numeracji.* ([S64] z.163, [S70] z.212).

D. Wynika to z twierdzenia 6.3.1 zastosowanego dla wielomianu $f(x) = x^2$. ⊠

6.3.4. *Czy zapis dziesiętny liczby kwadratowej może rozpoczynać się od* 1983 *dziewiątek?* ([GaT] 8/83).

O. Może. Niech $n = 99\dots995$ (1983 dziewiątki). Wtedy $n^2 = 99\dots9900\dots0025$ (1983 dziewiątki i 1983 zera). Uwaga. Wynika to również z 6.3.3. ⊠

6.3.5. *Istnieje* 199*-cyfrowa liczba kwadratowa posiadająca na początku* 99 *dziewiątek.* ([Fom] 33/72, [WyKM] 587-72).

6.3.6. *Nie istnieje liczba kwadratowa* 20*-cyfrowa posiadająca na początku* 11 *jedynek.* ([Fom] 25/74).

6.3.7. *Nie istnieje liczba naturalna $n > 1$ niepodzielna przez* 10*, której zapis dziesiętny jest początkowym fragmentem zapisu dziesiętnego liczby n^2.* ([Zw] 2003).

6.3.8. *Dla każdej liczby naturalnej m istnieje nieskończenie wiele m-liczb postaci n^3. To samo zachodzi dla dowolnego systemu numeracji.*

D. Wynika to z twierdzenia 6.3.1 zastosowanego dla wielomianu $f(x) = x^3$. ⊠

6.3.9. *Czy sześcian może się rozpoczynać cyframi* $1, 9, 9, 8$*?* Odp. *Tak. Przykłady:* $12596^3 = 1998471484736$, $12597^3 = 199847500173$. *Liczba* 12596 *jest najmniejsza o tej własności.* ([Kw] 3/1999).

6.3.10. *Czy sześcian może się rozpoczynać cyframi* $2, 0, 0, 2$*?* ([KoM] 2002 B3557).

6.3.11. *Istnieją liczby naturalne a, niepodzielne przez* 10 *takie, że początkowe cyfry liczby a^3 tworzą liczbę a. Przykłady:* $32^3 = 32\,768$, $31623^3 = 31623\,446801367$. *Jeśli $(p+1)$-sza cyfra po przecinku rozwinięcia dziesiętnego liczby $\sqrt{10}$ jest większa od* 5*, to liczba* $a = \left[10^p \cdot \sqrt{10}\right] + 1$ *ma tę własność.* ([Crux] 1995 z.1932 s.94, [Ko02]).

6.3.12. *Niech $s \geqslant 1$. Dla każdej liczby naturalnej m istnieje nieskończenie wiele m-liczb postaci n^s. To samo zachodzi dla dowolnego systemu numeracji.*

D. Wynika to z twierdzenia 6.3.1 zastosowanego dla wielomianu $f(x) = x^s$. ⊠

6.3.13. *Dla każdej liczby naturalnej m istnieje nieskończenie wiele m-liczb trójkątnych. To samo zachodzi dla dowolnego systemu numeracji.* ([S62] 41).

D. Wynika to z twierdzenia 6.3.2 zastosowanego dla wielomianu $f(x) = \frac{1}{2}x(x+1)$. ⊠

6.3.14. *Dla każdej liczby naturalnej m istnieje nieskończenie wiele m-liczb tetraedralnych. To samo zachodzi dla dowolnego systemu numeracji.* ([S62] 57).

D. Wynika to z twierdzenia 6.3.2 zastosowanego dla wielomianu $f(x) = \frac{1}{6}x(x+1)(x+2)$. ⊠

6.3.15. *Dla każdej liczby naturalnej m istnieje nieskończenie wiele m-liczb wielokątnych ustalonej postaci. To samo zachodzi dla dowolnego systemu numeracji.*

D. Wynika z twierdzenia 6.3.2. ⊠

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

6.4 Początkowe cyfry postępów arytmetycznych

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

6.4.1. *Niech $m, q \in \mathbb{N}$, $q \geqslant 2$. W każdym rosnącym postępie arytmetycznym liczb naturalnych istnieje nieskończenie wiele (m,q)-liczb.*

D. Sposób I ([S64] z.55, [S70] z.63). Niech $a_n = an + b$, gdzie $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \geqslant 1$, $b \geqslant 0$. Niech $b = at + r$, $t, r \in \mathbb{Z}$, $t \geqslant 0$, $0 \leqslant r < a$. Wtedy $a_n = a(n+t) + r$. Niech k będzie liczbą naturalną taką, że $q^k > 2a(t+1)$. Wtedy $q^k > 2a$ oraz $\frac{mq^k}{a} > 2m(t+1) = 2mt + 2m > t + 1$, czyli liczba $\frac{mq^k}{a} - t$ jest dodatnia. Niech n będzie najmniejszą liczbą naturalną większą od $\frac{mq^k}{a} - t$. Wtedy $n \geqslant 1$ oraz $n - 1 < \frac{mq^k}{a} - t$ i stąd $n + 1 < \frac{mq^k}{a} + 2 - t = \frac{mq^k+2a}{a} - t < \frac{mq^k+q^k}{a} - t = \frac{(m+1)q^k}{a} - t$, czyli $n+1 < \frac{(m+1)q^k}{a} - t$. Mamy zatem: $mq^k = a\left(\frac{mq^k}{a} - t\right) + at < an + at \leqslant an + at + r = a_n < an + at + a = a(n+1) + at < a\left(\frac{(m+1)q^k}{a} - t\right) + at = (m+1)q^t$. Wykazaliśmy więc, że $mq^k < a_n < (m+1)q^k$. To oznacza, na mocy 6.1.1, że a_n jest (m,q)-liczbą.

W ciągu arytmetycznym (a_n) istnieje więc (m,q)-liczba. Oznaczmy ją przez u. Rozważając teraz podciąg ciągu (a_n) składający się z wszystkich wyrazów większych od u, otrzymujemy rosnący ciąg arytmetyczny, który - na mocy powyższego rozumowania - również posiada (m,q)-liczbę. Powtarzając ten proces stwierdzamy, że takich (m,q)-liczb w ciągu (a_n) istnieje nieskończenie wiele. ⊠

D. Sposób II. Teza wynika natychmiast z twierdzenia 6.3.1 zastosowanego dla wielomianu $f(x)$ postaci $ax + b$. ⊠

6.4.2. *Niech $m \in \mathbb{N}$. W każdym rosnącym postępie arytmetycznym liczb naturalnych istnieje nieskończenie wiele m-liczb.* (6.4.1 dla $q = 10$, [Mat] 3/1962 129, [S64] 55).

6.4.3. *Niech $m \in \mathbb{N}$. Dla każdej liczby naturalnej a istnieje nieskończenie wiele liczb naturalnych n takich, że początkowe cyfry liczby na tworzą liczbę m.* (Wynika z 6.4.2).

---

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

6.5 Początkowe cyfry liczb potęgowych

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

6.5.1. *Niech $a, m, q \in \mathbb{N}$, przy czym $q \geqslant 2$. Jeśli $\log_q a$ jest liczbą niewymierną, to w ciągu (a^n) istnieje nieskończenie wiele (m, q)-liczb.*

D. Sposób I. Załóżmy, że $\gamma := \log_q a$ jest liczbą niewymierną. Wystarczy oczywiście udowodnić, że w ciągu (a^n) istnieje co najmniej jedna (m, q)-liczba. Na mocy 6.1.1 sprowadza się to do udowodnienia, że istnieją liczby naturalne k, n takie, że $mq^k \leqslant a^n < (m+1)q^k$. To jest natomiast równoważne temu, że istnieją liczby naturalne k, n takie, że $k + \log_q m \leqslant n \log_q a < k + \log_q(m + 1)$ czyli, że $\log_q m \leqslant n\gamma - k < \log_q(m + 1)$. Istnienie takich liczb naturalnych wynika z twierdzenia 6.2.5.

Sposób II. Wynika to natychmiast z twierdzenia 6.2.9. ⊠

Z powyższych faktów, zastosowanych dla $q = 10$, otrzymujemy następujące wnioski.

6.5.2. *Niech $a, m \in \mathbb{N}$. Jeśli a nie jest potęgą dziesiątki, to w ciągu (a^n) istnieje nieskończenie wiele liczb, których początkowe cyfry są odpowiednio równe cyfrom liczby m.*

6.5.3. *Niech $m, q \in \mathbb{N}$, przy czym $q \geqslant 2$. Niech $a_1, \dots, a_t$ będą liczbami naturalnymi, z których żadna nie jest potęgą dziesiątki. Istnieje wówczas taka liczba naturalna n, że początkowe cyfry w systemie numeracji o podstawie q wszystkich liczb $a_1^n, a_2^n, \dots, a_t^n$ są jednakowe i równe odpowiednim cyfrom w systemie numeracji o podstawie q liczby m.*

D. Sposób I. Na mocy 6.1.1 sprowadza się to do udowodnienia, że istnieje liczba naturalna n oraz istnieją liczby naturalne $k_1, \dots, k_t$ takie, że $mq^{k_i} \leqslant a_i^n < (m + 1)q^{k_i}$ dla wszystkich $i = 1, \dots, t$. To jest natomiast równoważne temu, że $k_i + \log_q m \leqslant n \log_q a_i < k_i + \log_q(m + 1)$ czyli, że $\log_q m \leqslant n \log a_i - k_i < \log_q(m + 1)$ dla $i = 1, \dots, t$. Istnienie takich liczb naturalnych wynika z twierdzenia 6.2.6.

Sposób II. Wynika to natychmiast z twierdzenia 6.2.12. ⊠

W szczególności dla $q = 10$ otrzymujemy:

6.5.4. *Niech $m \in \mathbb{N}$. Niech $a_1, \dots, a_t$ będą liczbami naturalnymi takimi, że wszystkie liczby $\log a_1, \dots, \log a_t$ są niewymierne. Istnieje wówczas taka liczba naturalna n, że początkowe cyfry rozwinięcia dziesiętnego wszystkich liczb $a_1^n, a_2^n, \dots, a_t^n$ są jednakowe i równe odpowiednim cyfrom rozwinięcia dziesiętnego liczby m.*

6.5.5. *Niech $m \in \mathbb{N}$. Istnieje wtedy taka liczba naturalna n, że początkowe cyfry liczb 2^n i 5^n są jednakowe i równe odpowiednim cyfrom liczby m.* ([Dlt] 3/1998, wynika z 6.5.4).

6.5.6. *Niech $m \in \mathbb{N}$. Istnieje wtedy taka liczba naturalna n, że początkowe cyfry liczb 2^n, 3^n, 5^n i 7^n są jednakowe i równe odpowiednim cyfrom liczby m.* (Wynika z 6.5.4).

Z twierdzenia 6.5.2 wynika w szczególności, że jeśli a jest liczbą naturalną, to w ciągu (a^n) istnieje nieskończenie wiele wyrazów, których pierwszą cyfrą (w zapisie dziesiętnym) jest jedynka. Jeśli jeszcze dodatkowo a nie jest potęgą dziesiątki, to w ciągu (a^n) istnieje nieskończenie wiele takich wyrazów, których pierwszą cyfrą jest ustalona niezerowa cyfra c.

6.5.7. *Niech $a, n \in \mathbb{N}$ oraz $c \in \{1, 2, \dots, 9\}$. Załóżmy, że a nie jest potęgą dziesiątki i $a^n \geqslant 10c$. Wtedy następujące dwa warunki są równoważne:*

(1) *pierwsza cyfra liczby a^n jest równa c;*

(2) *część ułamkowa liczby $n \log a - \log c$ jest ostro mniejsza od $\log \frac{c+1}{c}$.* ([Kw] 5(1978) 3-4).

D. Część ułamkową liczby rzeczywistej x oznaczamy przez $\{x\}$.

(1) $\Rightarrow$ (2). Załóżmy, że c jest pierwszą cyfrą liczby a^n. Istnieje wtedy taka liczba naturalna m, że

$$c \cdot 10^m \leqslant a^n < (c+1) \cdot 10^m.$$

Nierówności te logarytmujemy i kolejno przekształcamy:

$$m + \log c \leqslant n \log a < m + \log(c+1),$$
$$0 \leqslant n \log a - m - \log c < \log(c+1) - \log c,$$
$$0 \leqslant (n \log a - \log c) - m < \log \tfrac{c+1}{c}.$$

Ale $\frac{c+1}{c} = 1 + \frac{1}{c} \leqslant 2 < 10$, więc $\log \frac{c+1}{c} < 1$, a zatem $0 \leqslant (n \log a - \log c) - m < 1$ i stąd otrzymujemy nierówność $\{n \log a - \log c\} < \frac{c+1}{c}$.

(2) $\Rightarrow$ (1). Załóżmy teraz, że $\{n \log a - \log c\} < \frac{c+1}{c}$. Ponieważ $a^n \geqslant 10c$, więc $n \log c \geqslant 1 + \log c$, a więc $n \log a - \log c \geqslant 1$. Istnieje zatem taka liczba naturalna m, że

$$0 \leqslant (n \log a - \log c) - m < \log \frac{c+1}{c}.$$

Z tych nierówności, po przekształceniach takich jak w pierwszej części tego dowodu tylko w odwrotnym kierunku, otrzymujemy nierówności $c \cdot 10^m \leqslant a^n < (c+1) \cdot 10^m$, z których wynika, że c jest pierwszą cyfrą liczby a^n. ⊠

Następne twierdzenie jest natychmiastową konsekwncją twierdzeń 6.5.7 i 6.2.8.

6.5.8. *Niech $a \in \mathbb{N}$ oraz $c \in \{1, 2, \dots, 9\}$. Załóżmy, że a nie jest potęgą dziesiątki. Dla każdej liczby naturalnej n niech d_n będzie liczbą tych wszystkich wyrazów ciągu*

$$a^1, \ a^2, \ a^3, \ \dots, \ a^n,$$

których pierwszą cyfrą (w zapisie dziesiętnym) jest c. Wtedy ciąg $\left(\frac{d_n}{n}\right)$ posiada granicę i granica ta jest równa $\log(c+1) - \log c$. ([Kw] 5(1978), [Mon] 118(7)(2011)).

W języku stosowanym w teorii rachunku prawdopodobieństwa powyższe twierdzenie można wysłowić w następujący sposób. Prawdopodobieństwo tego, że wybrana losowo potęga ustalonej liczby naturalnej a ma na pierwszym miejscu cyfrę c, jest równe $\log(c+1) - \log c$. Zauważmy, że to prawdopodobieństwo nie zależy od liczby a. Zakłada się tylko, że a nie jest potęgą dziesiątki. Prawdopodobieństwo tego, że wybrana losowo potęga dwójki ma jedynkę na pierwszym miejscu, jest takie samo, jak prawdopodobieństwo tego, że wybrana losowo potęga trójki (lub piątki albo na przykład liczby 357) ma jedynkę na pierwszym miejscu.

Rozważaliśmy system dziesiętny. To samo można udowodnić dla dowolnego systemu numeracji o podstawie $q \geqslant 2$. W dowodach zamieniamy tylko liczbę 10 na liczbę q oraz logarytmy dziesiętne zamieniamy na logarytmy przy podstawie q. W szczególności mamy następujące twierdzenie.

6.5.9. *Niech* $2 \leqslant q \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{N}$ *oraz* $c \in \{1, 2, \ldots, q-1\}$. *Załóżmy, że* $\log_q a$ *jest liczbą niewymierną. Dla każdej liczby naturalnej* n *niech* d_n *będzie liczbą tych wszystkich wyrazów ciągu*

$$a^1,\ a^2,\ a^3,\ \ldots,\ a^n,$$

których pierwszą cyfrą w zapisie numeracji o podstawie q *jest* c. *Wtedy ciąg* $\left(\frac{d_n}{n}\right)$ *posiada granicę i granica ta jest równa* $\log_q(c+1) - \log_q c$.

Zauważmy, że w systemie dwójkowym powyższe twierdzenie jest oczywiste. Jeśli $q = 2$, to jedyną niezerową cyfrą jest $c = 1$ oraz każda potęga dowolnej liczby naturalnej ma, w dwójkowym systemie numeracji, pierwszą cyfrę równą 1. W tym przypadku dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzi więc równość $d_n = n$, a zatem $\lim \frac{d_n}{n} = \lim \frac{n}{n} = 1$ i oczywiście $\log_2 2 - \log_2 1 = 1 - 0 = 1$.

★

W. Bołtiański, *Czy często potęgi dwójki rozpoczynają się jedynką?*, [Kw] 5/1978 2-7.
K. A. Ross, *Benford's law, a growth industry*, [Mon] 7(118) 571-583.

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

6.6 Początkowe cyfry symboli Newtona

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

Przedstawiamy obszerne fragmenty artykułu *Początkowe cyfry symboli Newtona*, napisanego wspólnie z Grzegorzem Bartczakiem, opublikowanego w Delcie 9/1997, 14-15.

Spójrzmy na kilka przykładów.

$$\begin{aligned}
\tbinom{1997}{1} &= 1997\\
\tbinom{1999}{2} &= 1997001\\
\tbinom{494}{3} &= 19970444\\
\tbinom{4681}{4} &= 19979587391790\\
\tbinom{7517}{5} &= 199739353621084563\\
\tbinom{1562}{6} &= 19979205577825494\\
\tbinom{7207}{7} &= 19979530358720039931924 1\\
\tbinom{4108}{8} &= 1997841430944510255346671\\
\tbinom{9653}{9} &= 19979176557875313276158532 37150\\
\tbinom{158}{10} &= 1997837760676615
\end{aligned}$$

Każda z wypisanych tu liczb rozpoczyna się cyframi $1, 9, 9, 7$. Nasuwa się pytanie:

Czy dla każdego k *istnieje* n *takie, że liczba* $\binom{n}{k}$ *jest postaci* $1997\ldots$ *?*

Wykażemy, że odpowiedź na to pytanie jest pozytywna. Wykażemy więcej. Udowodnimy następujące twierdzenie.

6.6.1. *Niech* k *będzie liczbą naturalną i niech* $c_1 \neq 0, c_2, \ldots, c_m$ *będzie dowolnym ciągiem cyfr układu dziesiętnego. Istnieje wtedy liczba naturalna* n *taka, że początkowe cyfry liczby* $\binom{n}{k}$ *są równe odpowiednio* $c_1, c_2, \ldots, c_m$.

W dowodzie tego twierdzenia wykorzystamy dwa lematy.

6.6.2. *Załóżmy, że a, b, c są liczbami rzeczywistymi, $b > a$ oraz $c > 0$. Istnieje wtedy liczba naturalna s_0 taka, że dla wszystkich liczb naturalnych $s \geqslant s_0$ zachodzi nierówność $sb > sa + c$.*

D. Niech $s_0 = \left[\frac{c}{b-a}\right] + 1$ (przez $[x]$ oznaczamy część całkowitą liczby x). Wówczas s_0 jest liczbą naturalną i dla wszystkich $s \geqslant s_0$ mamy:

$$s \geqslant s_0 = \left[\frac{c}{b-a}\right] + 1 > \frac{c}{b-a}.$$

Zatem, jeśli $s \geqslant s_0$, to $s(b-a) > c$, czyli $sb > sa + c$. ⊠

6.6.3. *Niech u, v będą liczbami rzeczywistymi i niech k będzie liczbą naturalną. Załóżmy, że $u - v > k > 1$. Istnieje wtedy liczba naturalna n taka, że $u > n > n - k + 1 > v$.*

D. Przyjmijmy $n = [v] + k$. Wtedy: $u > v + k \geqslant [v] + k = n > n - k + 1 = [v] + 1 > v$. ⊠

Teraz możemy już udowodnić zapowiedziane twierdzenie.

Dowód twierdzenia 6.6.1. Niech $a = \sqrt[k]{M}$, $b = \sqrt[k]{M+1}$, $c = \sqrt[k]{(k!)^{k-1}}$, gdzie

$$M = c_1 10^{m-1} + c_2 10^{m-2} + \cdots + c_{m-1} 10 + c_m.$$

Twierdzenie jest oczywiste dla $k = 1$. W tym przypadku wystarczy za n przyjąć liczbę M (gdyż $\binom{M}{1} = M$). Załóżmy więc dalej, że $k > 1$.

Z lematu 6.6.2 wynika, że istnieje liczba naturalna t spełniająca nierówność $10^t b > c + 10^t a$, czyli

$$10^t \sqrt[k]{M+1} > \sqrt[k]{(k!)^{k-1}} + 10^t \sqrt[k]{M}.$$

Mnożąc tę nierówność stronami przez $\sqrt[k]{k!}$ otrzymujemy:

$$10^t \sqrt[k]{(M+1)k!} > k! + 10^t \sqrt[k]{M \cdot k!}$$

i stąd

$$10^t \sqrt[k]{(M+1)k!} - 10^t \sqrt[k]{M \cdot k!} > k! \geqslant k > 1.$$

Z lematu 6.6.3 wynika teraz, że istnieje liczba naturalna n spełniająca nierówności:

$$10^t \sqrt[k]{(M+1)k!} > n > n - k + 1 > 10^t \sqrt[k]{M \cdot k!}.$$

Podnosząc to do k-tej potęgi i dzieląc stronami przez $k!$ otrzymujemy:

$$10^{kt}(M+1) > \frac{n^k}{k!} > \frac{(n-k+1)^k}{k!} > 10^{kt} M$$

i stąd dalej

$$10^{kt}(M+1) > \frac{n^k}{k!} > \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} = \binom{n}{k} > \frac{(n-k+1)^k}{k!} > 10^{kt} M.$$

Wykazaliśmy zatem, że istnieje liczba naturalna n taka, że

$$10^{kt}(M+1) > \binom{n}{k} > 10^{kt} M.$$

Początkowe cyfry liczby $\binom{n}{k}$ są więc odpowiednio równe cyfrom liczby M czyli cyfrom $c_1, c_2, \ldots c_m$. To kończy dowód twierdzenia. ⊠

Twierdzenie zachodzi dla cyfr dowolnego układu numeracji (niekoniecznie dziesiętnego). Chcąc się o tym przekonać wystarczy w przedstawionym dowodzie zastąpić wszystkie występujące w nim liczby 10 podstawą numeracji $q > 1$. Mamy zatem

6.6.4. *Niech $q \geqslant 2$, m, k będą liczbami naturalnymi. Istnieje wówczas liczba naturalna n taka, że początkowe cyfry rozwinięcia przy podstawie q liczby $\binom{n}{k}$ pokrywają się odpowiednio z cyframi rozwinięcia przy podstawie q liczby m.*

Z dowodu wynika również, że liczb n, o których mowa w twierdzeniu, istnieje nieskończenie wiele.

Inny dowód twierdzenia 6.6.1. (W. Pompe [Dlt] 3/1998). Niech $f(x) = \frac{1}{k!}x(x-1)(x-2)\cdots(x-k+1)$. Wtedy $f(x)$ jest wielomianem należącym do $\mathbb{Q}[x]\smallsetminus\mathbb{Q}$ o dodatnim współczynniku przy najwyższej potędze i takim, że $f(\mathbb{Z}) \subseteq \mathbb{Z}$. Ponadto, $f(n) = \binom{n}{k}$ dla $n \in \mathbb{N}$. Teza wynika zatem z 6.3.2. ⊠

6.6.5. *Dla każdej liczby naturalnej m istnieje liczba naturalna n taka, że początkowe cyfry rozwinięcia dziesiętnego liczby $\binom{2n}{n}$ pokrywają się odpowiednio z cyframi rozwinięcia dziesiętnego liczby m.* (W. Pompe [Dlt] 3(1998)).

D. Niech $a_n = \binom{2n}{n}$. Ponieważ $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{4n+2}{n+1}$, więc $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 4$. Liczba $\log 4$ jest niewymierna. Teza wynika zatem z 6.2.9. ⊠

6.6.6. *Dla każdej liczby naturalnej m istnieje liczba naturalna n taka, że początkowe cyfry rozwinięcia dziesiętnego liczby $\binom{3n}{n}$ pokrywają się odpowiednio z cyframi rozwinięcia dziesiętnego liczby m.* (W. Pompe [Dlt] 3(1998)).

D. Niech $a_n = \binom{3n}{n}$. Ponieważ $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{27}{4}$ i liczba $\log\frac{27}{4}$ jest niewymierna, więc teza wynika z twierdzenia 6.2.9. ⊠

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

6.7 Początkowe cyfry i różne ciągi

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

6.7.1. *Istnieje liczba naturalna n taka, że liczba $n!$ rozpoczyna się cyframi:*

(1) $1, 9, 6, 6$; ([GaT] 15/66).

(2) $1, 9, 9, 3$; ([OM] Niemcy 1993).

(3) $1, 9, 9, 5$; ([ME] 1/1996).

6.7.2. *Nie istnieje liczba naturalna n taka, że dla każdego $k \in \{1, 2, \ldots, 9\}$ pierwszą cyfrą liczby $(n+k)!$ jest k.* ([IMO] Shortlist 2001).

6.7.3. *Dla dowolnego skończonego ciągu cyfr (układu dziesiętnego) $c_1, c_2, \ldots, c_n$ istnieje nieskończenie wiele liczb pierwszych, których n początkowymi cyframi są kolejno $c_1, \ldots, c_n$.* ([Trost] 51, [S59] 412).

6.7.4. *Niech (u_n) będzie ciągiem liczb Fibonacciego ($u_1 = u_2 = 1$, $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$). Wówczas dla każdej liczby naturalnej m istnieje nieskończenie wiele takich wyrazów ciągu (u_n), których początkowe cyfry są odpowiednio równe cyfrom liczby m.* ([Crux] 2000 485-486 z.A237).

D. Wiadomo, że $u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n - \beta^n)$, gdzie $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Korzystając z tego, łatwo wykazać, że $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \alpha > 1$. Ponadto, $\log \alpha$ jest liczbą niewymierną. Teza wynika zatem z twierdzenia 6.2.9. ⊠

6.7.5. *Niech $m \in \mathbb{N}$. Istnieje wtedy taka liczba naturalna n, że początkowe cyfry liczby 2^n i liczby Fibonacciego u_n są jednakowe i równe odpowiednim cyfrom liczby m.*

D. Wiemy (patrz dowód 6.7.4), że $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \alpha$, gdzie $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2} > 1$. Ponadto, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}}{2^n} = 2$ oraz liczby $\log \alpha$ i $\log 2$ są niewymierne. Teza wynika zatem z twierdzenia 6.2.11. ⊠

★ M. Dulnikowska, *Początkowe cyfry klasycznych ciągów*, [Pmgr] 2007.
R. E. Whitney, *Initial digits for the sequence of primes*, [Mon] 79(2)(1972) 150-152.

7 Potęgi dwójki

1	2	31	2147483648	61	2305843009213693952
2	4	32	4294967296	62	4611686018427387904
3	8	33	8589934592	63	9223372036854775808
4	16	34	17179869184	64	18446744073709551616
5	32	35	34359738368	65	36893488147419103232
6	64	36	68719476736	66	73786976294838206464
7	128	37	137438953472	67	147573952589676412928
8	256	38	274877906944	68	295147905179352825856
9	512	39	549755813888	69	590295810358705651712
10	1024	40	1099511627776	70	1180591620717411303424
11	2048	41	2199023255552	71	2361183241434822606848
12	4096	42	4398046511104	72	4722366482869645213696
13	8192	43	8796093022208	73	9444732965739290427392
14	16384	44	17592186044416	74	18889465931478580854784
15	32768	45	35184372088832	75	37778931862957161709568
16	65536	46	70368744177664	76	75557863725914323419136
17	131072	47	140737488355328	77	151115727451828646838272
18	262144	48	281474976710656	78	302231454903657293676544
19	524288	49	562949953421312	79	604462909807314587353088
20	1048576	50	1125899906842624	80	1208925819614629174706176
21	2097152	51	2251799813685248	81	2417851639229258349412352
22	4194304	52	4503599627370496	82	4835703278458516698824704
23	8388608	53	9007199254740992	83	9671406556917033397649408
24	16777216	54	18014398509481984	84	19342813113834066795298816
25	33554432	55	36028797018963968	85	38685626227668133590597632
26	67108864	56	72057594037927936	86	77371252455336267181195264
27	134217728	57	144115188075855872	87	154742504910672534362390528
28	268435456	58	288230376151711744	88	309485009821345068724781056
29	536870912	59	576460752303423488	89	618970019642690137449562112
30	1073741824	60	1152921504606846976	90	1237940039285380274899124224

100	1267650600228229401496703205376
200	1606938044258990275541962092341162602522202993782792835301376
300	2037035976334486086268445688409378161051468393665936250636140449354381299763336 706183397376
400	2582249878086908589655919172003011874329705792829223512830659356540647622016841 194629645353280137831435903171972747493376
500	3273390607896141870013189696827599152216642046043064789483291368096133796404674 554883270092325904157150886684127560071009217256545885393053328527589376
1000	1071508607186267320948425049060001810561404811705533607443750388370351051124936 1224931983788156958581275946729175531468251871452856923140435984577574698574803 9345677748242309854210746050623711418779541821530464749835819412673987675591655 439460770629145711964776865421676604298316526243868372056680693376

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

7.1 Wstępne informacje i ciekawostki

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

7.1.1. *Liczba* 2^{100} *ma* 31 *cyfr.* ([GaT] 13/47).

7.1.2. *Liczby* 2^{1000}, 2^{10000}, 2^{100000} *i* $2^{1000000}$ *mają odpowiednio* 302, 3011, 30103 *i* 301030 *cyfr.* (Maple).

7.1.3. *Dla każdej liczby naturalnej* n *liczby* $2^n + 1974^n$ *i* 1974^n *mają tę samą liczbę cyfr.* ([GaT] 26/75).

7.1.4. *Istnieje nieskończenie wiele liczb naturalnych* n*, dla których liczby* 2^n, 2^{n+1}, 2^{n+2}, 2^{n+3} *mają tę samą liczbę cyfr.* ([Mat] 5/1963 209).

7.1.5. *Liczba cyfr liczby* 2^n *nie jest większa od liczby* $\left[\frac{n}{3}\right] + 1$.

D. Wykorzystamy nierówność $2^3 < 10^1$. Niech $c(m)$ oznacza liczbę cyfr liczby naturalnej m.
Jeśli $n = 3k$, gdzie $k \in \mathbb{N}$, to $2^n = (2^3)^k < 10^k$ i stąd wynika, że $c(2^n) \leqslant k < k+1 = \left[\frac{n}{3}\right] + 1$. Gdy $n = 3k+1$, to $2^n = 2(2^3)^k < 10 \cdot 10^k = 10^{k+1}$, więc $c(2^n) \leqslant k+1 = \left[\frac{n}{3}\right] + 1$. W przypadku $n = 3k+2$ mamy: $2^n = 2^2(2^3)^k < 10^2 10^k = 10^{k+2}$, więc $c(2^n) \leqslant k+2 = \left[\frac{n}{3}\right] + 1$. ⊠

7.1.6. *Największe* n *z przedziału* $[1, 10\,000]$ *takie, że liczba* 2^n *nie posiada cyfry* k*. W nawiasach kwadratowych podano liczbę cyfr liczby* 2^n.

$k = 0$,	$n = 86$,	[26];	$k = 5$,	$n = 71$,	[22];
$k = 1$,	$n = 91$,	[28];	$k = 6$,	$n = 93$,	[28];
$k = 2$,	$n = 168$,	[51];	$k = 7$,	$n = 71$,	[22];
$k = 3$,	$n = 153$,	[47];	$k = 8$,	$n = 78$,	[24];
$k = 4$,	$n = 107$,	[33];	$k = 9$,	$n = 108$,	[33]. (Maple).

7.1.7. *Jeśli* $10\,000 \geqslant n > 168$*, to liczba* 2^n *posiada wszystkie cyfry układu dziesiętnego. Czy to również zachodzi dla* $n > 10\,000$*?* (Maple).

7.1.8. *Liczba* $2^4 = 16$ *nie jest oczywiście liczbą pierwszą, ale jej lustrzane odbicie* 61 *jest liczbą pierwszą. W przedziale* $[1, 100]$ *istnieje* 12 *liczb naturalnych* n *takich, że lustrzane odbicie liczby* 2^n *jest liczbą pierwszą. Są to liczby:*

$$1,\ 4,\ 5,\ 7,\ 10,\ 17,\ 24,\ 37,\ 45,\ 55,\ 70,\ 77.$$

W przedziale $[1, 1000]$ *istnieje* 17 *takich liczb; oprócz tych wymienionych są jeszcze:* 107, 137, 150, 271 *oraz* 364. (Maple).

7.1.9. *Oznaczmy przez* $a(k)$ *najmniejszą liczbę naturalną* n *taką, że rozwinięcie dziesiętne liczby* 2^n *posiada blok składający się z dokładnie* k *kolejnych zer. Mamy wtedy:* $a(1) = 10$, $a(2) = 53$, $a(3) = 242$, $a(4) = 377$, $a(5) = 1491$, $a(6) = 1492$, $a(7) = 6801$. (Maple).

7.1.10. *Permutując cyfry rozwinięcia dziesiętnego liczby* 2^k *nie można otrzymać liczby postaci* 2^n*, gdzie* $n > k$. ([GaT] 9/71,[Tao]).

7.1.11. *Wyznaczyć wszystkie potęgi liczby* 2*, których zapis w siódemkowym układzie pozycyjnym składa się z samych jedynek.* Odp. *Tylko* 2^3 *ma taką własność.* ([Dlt] 10/1996).

---

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

7.2 Początkowe cyfry potęg dwójki

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

7.2.1. *Dla dowolnego skończonego ciągu cyfr istnieje liczba naturalna postaci 2^n, której początkowe cyfry są takie jak w danym ciągu.* ([Kw] 12/1974 28,72, [GaT] 19/49, [Dlt] 7/1994 5).

D. Ponieważ liczba $\log 2$ jest niewymierna, więc teza wynika z 6.5.2. ⊠

7.2.2. *Najmniejsze n takie, że początkowe cyfry liczby 2^n tworzą daną liczbę m.* (Maple).

m	n	m	n	m	n	m	n	m	n
1901	1436	1921	858	1941	5037	1961	187	1981	2230
1902	5708	1922	2994	1942	280	1962	4459	1982	10774
1903	951	1923	373	1943	4552	1963	1838	1983	1745
1904	5223	1924	2509	1944	10960	1964	3974	1984	8153
1905	466	1925	8917	1945	1931	1965	10382	1985	1260
1906	6874	1926	2024	1946	10475	1966	1353	1986	7668
1907	2117	1927	8432	1947	1446	1967	9897	1987	775
1908	6389	1928	1539	1948	9990	1968	868	1988	7183
1909	1632	1929	7947	1949	961	1969	7276	1989	290
1910	5904	1930	1054	1950	7369	1970	383	1990	6698
1911	1147	1931	7462	1951	476	1971	6791	1991	1941
1912	5419	1932	569	1952	6884	1972	2034	1992	4077
1913	662	1933	6977	1953	2127	1973	6306	1993	1456
1914	4934	1934	84	1954	6399	1974	1549	1994	3592
1915	177	1935	6492	1955	1642	1975	5821	1995	971
1916	4449	1936	1735	1956	5914	1976	1064	1996	3107
1917	1828	1937	6007	1957	1157	1977	5336	1997	486
1918	3964	1938	1250	1958	5429	1978	579	1998	2622
1919	1343	1939	5522	1959	672	1979	4851	1999	9030
1920	3479	1940	765	1960	4944	1980	94	2000	2137

7.2.3. *Najmniejsze n takie, że początkowe cyfry liczby 2^n tworzą daną liczbę m.* (Maple).

m	n	m	n	m	n	m	n	m	n
2001	8545	2021	1559	2041	1466	2061	1373	2081	1280
2002	1652	2022	3695	2042	5738	2062	5645	2082	5552
2003	5924	2023	10103	2043	981	2063	888	2083	795
2004	1167	2024	1074	2044	3117	2064	5160	2084	2931
2005	5439	2025	7482	2045	496	2065	403	2085	310
2006	682	2026	589	2046	2632	2066	2539	2086	2446
2007	4954	2027	6997	2047	9040	2067	8947	2087	8854
2008	197	2028	104	2048	2147	2068	2054	2088	1961
2009	4469	2029	6512	2049	6419	2069	8462	2089	6233
2010	10877	2030	1755	2050	1662	2070	1569	2090	1476
2011	1848	2031	3891	2051	5934	2071	5841	2091	5748
2012	8256	2032	1270	2052	1177	2072	1084	2092	991
2013	1363	2033	3406	2053	5449	2073	5356	2093	3127
2014	7771	2034	785	2054	692	2074	599	2094	506
2015	878	2035	2921	2055	2828	2075	2735	2095	2642
2016	7286	2036	9329	2056	207	2076	114	2096	9050
2017	393	2037	300	2057	2343	2077	2250	2097	21
2018	4665	2038	6708	2058	8751	2078	8658	2098	6429
2019	2044	2039	1951	2059	1858	2079	1765	2099	1672
2020	4180	2040	6223	2060	6130	2080	6037	2100	3808

7.2.4. *Niech $q \geqslant 2$ będzie taką liczbą naturalną, że liczba $\log_q 2$ jest niewymierna. Dla dowolnego skończonego ciągu cyfr systemu numeracji o podstawie q istnieje liczba naturalna postaci 2^n, której początkowe cyfry w systemie numeracji o podstawie q są równe odpowiednim elementom tego ciągu.* (Wynika z 6.5.1).

7.2.5. *Istnieje potęga dwójki rozpoczynająca się cyframi* 1986. ([Kw] 7/1986 5).

O. (Maple). Takimi cyframi rozpoczyna się liczba 2^{7668}. Liczba ta ma 2309 cyfr. Jest to najmniejsza taka liczba. ⊠

7.2.6. *Dla każdej liczby naturalnej C istnieje liczba naturalna n taka, że początkowe cyfry rozwinięcia dziesiętnego liczby $2^n \cdot n^2$ pokrywają się odpowiednio z cyframi rozwinięcia dziesiętnego liczby C.* (W. Pompe [Dlt] 3(1998)).

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

7.3 Pierwsza cyfra potęg dwójki

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

Spójrzmy na następujące potęgi dwójki:

$$2^4 = 16, \quad 2^7 = 128, \quad 2^{10} = 1024, \quad 2^{14} = 16384, \quad 2^{17} = 131072.$$

Pierwszą cyfrą każdej z tych potęg jest jedynka. Liczba cyfr wzrasta; 2^4 ma dwie cyfry, następna potęga ma 3 cyfry i dalej liczba cyfr jest odpowiednio równa $4, 5$ oraz 6. Czy dla każdej liczby naturalnej $m \geqslant 2$ istnieje m-cyfrowa potęga dwójki, której pierwszą cyfrą jest jedynka? Udowodnimy, że odpowiedź na to pytanie jest pozytywna.

7.3.1. *Dla każdej liczby naturalnej $m \geqslant 2$ istnieje (dokładnie jedna) liczba naturalna n taka, że liczba 2^n jest m-cyfrowa i pierwszą jej cyfrą jest jedynka. Tą jedyną liczbą n jest*

$$n = \left[\frac{m-1}{\log 2}\right] + 1. \quad \text{([Kw] 5/1978 3).}$$

D. Niech $2 \leqslant m \in \mathbb{N}$. Szukamy takiej liczby naturalnej n, która spełnia nierówności

$$10^{m-1} < 2^n < 2 \cdot 10^{m-1}.$$

Z tych nierówności wynika najpierw, że $x < n < x + 1$, gdzie $x = \frac{m-1}{\log 2}$, a następnie, że $n = [x] + 1$. Jest oczywiste, że takie n jest tylko jedno. ⊠

Jeśli na przykład $m = 10$, to $\left[\frac{m-1}{\log 2}\right] + 1 = 30$, a więc 2^{30} jest jedyną 10-cyfrową potęgą dwójki, której pierwszą cyfrą jest jedynka. Stosowaliśmy przybliżenie $\log 2 \approx 0,3010299957$. W taki sam sposób, ale za pomocą komputera, otrzymujemy następne przykłady.

7.3.2. *Jedyną* 100*-cyfrową potęgą dwójki, z pierwszą cyfrą równą* 1*, jest* 2^{329}. *Jedyną* 1000*-cyfrową potęgą dwójki, z pierwszą cyfrą równą* 1*, jest* 2^{3319}.

7.3.3. *Dla każdej liczby naturalnej n oznaczmy przez a_n liczbę tych wszystkich liczb w ciągu $2^1, 2^2, \dots, 2^n$, których pierwszą cyfrą jest jedynka.*

(1) *Jeżeli 2^n jest liczbą m-cyfrową, to $a_n = m - 1$.*

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = \log 2 \approx 0,30103.$ ([Kw] 5/1978 3).

D. Własność (1) wynika z 7.3.1. Własność (2) jest szczególnym przypadkiem twierdzenia 6.5.8.

Własność (2) można również wykazać w następujący sposób. Załóżmy, że 2^n jest liczbą m-cyfrową. Mamy wtedy nierówności: $10^{m-1} < 2^n < 10^m$, z których otrzymujemy $m - 1 < n \log 2 < m$. Ale $a_n = m - 1$, więc

$$\log 2 - \frac{1}{n} < \frac{a_n}{n} < \log 2,$$

a zatem, na mocy twierdzenia o trzech ciągach, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = \log 2$. ⊠

7.3.4. *Spośród liczb* $2^0, 2^1, 2^2, \ldots, 2^{1000}$ *co najmniej* 300 *rozpoczyna się cyfrą* 1.
([OM] Rosja 1995).

Dla każdej liczby naturalnej n i dla każdej cyfry $c \in \{1, 2, \ldots, 9\}$ oznaczmy przez $a_n(c)$ liczbę tych wszystkich liczb w ciągu

$$2^1,\ 2^2,\ 2^3,\ \ldots,\ 2^n,$$

których pierwszą cyfrą jest c. W rozdziale o początkowych cyfrach udowodniliśmy:

7.3.5. *Ciąg* $\left(\frac{a_n(c)}{n}\right)$ *jest zbieżny. Jego granicą jest liczba*

$$s_c = \log(c+1) - \log c. \quad \text{(Patrz 6.5.8).}$$

7.3.6. *Dla granic* s_c*, zdefiniowanych w poprzednim twierdzeniu, zachodzą równości:*

(1) $s_2 + s_3 = s_1$, $s_4 + s_5 = s_2$, $s_6 + s_7 = s_3$, $s_8 + s_9 = s_4$;

(2) $s_1 = \log 2 = 0,30103\ldots$, $s_4 = 1 - 3\log 2 = 0,096\ldots$. ([Kw] 5/1978 3).

7.3.7 (Maple). *W pierwszej kolumnie poniższej tabeli występują kolejne cyfry* c *od* 1 *do* 9. *W drugiej kolumnie są przybliżenia (do* 6 *cyfr po przecinku) liczb* $\log(c+1) - \log c$. *W następnych trzech kolumnach podano, odpowiednio dla* $n = 100$, $n = 1000$ *oraz* $n = 10\,000$, *liczby tych wyrazów ciągu* $2^1,\ 2^2,\ 2^3,\ \ldots,\ 2^n$, *któych pierwszą cyfrą jest* c.

c	log	100	1000	10000
1	0,301030	30	301	3010
2	0,176091	17	176	1761
3	0,124939	13	125	1249
4	0,096910	10	97	970
5	0,079181	7	79	791
6	0,066947	7	69	670
7	0,057992	6	56	579
8	0,051153	5	52	512
9	0,045757	5	45	458

7.3.8. *Niech* c_n *oznacza pierwszą cyfrę liczby* 2^n.

(1) *Ile jest jedynek wśród liczb* $c_1, c_2, \ldots, c_{1000}$ *?* Odp. 301.

(2) *Istnieje dokładnie* 57 *słów długości* 13 *postaci* $c_k c_{k+1} \ldots c_{k+12}$.

([TTsa] 1994, [Kw] 4/1995 M1473).

7.3.9. *Znaleźć wszystkie takie potęgi dwójki, które są również potęgami dwójki po skreśleniu pierwszej cyfry.* ([TTts] 1993).

★ A. Arnold, *Statystyka początkowych cyfr potęg dwójki i koniec świata*, [Kw] 1/1998 1-4.
W. Bołtiański, *Czy często potęgi dwójki rozpoczynają się jedynką?*, [Kw] 5/1978 2-7.
K. A. Ross, *Benford's law, a growth industry*, [Mon] 7(118) 571-583.

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

7.4 Ostatnie cyfry potęg dwójki

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

7.4.1. *Jeśli* $20 \mid n$, *to* $2^n \equiv 76 \pmod{100}$.

7.4.2. *Jeśli* $100 \mid n$, *to* $2^n \equiv 376 \pmod{1000}$.

7.4.3. *Znaleźć dwie ostatnie cyfry liczby* $2^{5^1} + 2^{5^2} + 2^{5^3} + \ldots + 2^{5^{1991}}$. Odp. 12. ([OM] Nordic 1991, [Pa97]).

7.4.4. *Końcówką dwucyfrową każdej liczby postaci* $2^{2n}(2^{2n+1} - 1)$, *gdzie* n *jest nieparzyste, jest* 28. ([OM] Holandia 1983).

7.4.5. *Cztery ostatnie cyfry liczby postaci* 2^n *nie są jednakowe.* ([GaT] 4/69).

W. Liczba naturalna o jednakowych czterech ostatnich cyfrach nie jest podzielna przez 16. ⊠

7.4.6. *Ciąg reszt z dzielenia przez* 100 *kolejnych liczb postaci* 2^n *jest okresowy. Okres nie jest czysty, rozpoczyna się od wyrazu drugiego i składa się z* 20 *wyrazów:*

$$4, 8, 16, 32, 64, 28, 56, 12, 24, 48, 96, 92, 84, 68, 36, 72, 44, 88, 76, 52.$$ ([S68] 140).

7.4.7. *Ciąg reszt z dzielenia przez* 1000 *kolejnych liczb postaci* 2^n *jest okresowy. Okres nie jest czysty, rozpoczyna się od wyrazu trzeciego i składa się ze* 100 *wyrazów:*

$$\begin{gathered} 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 24, 48, 96, 192, 384, 768, 536, 72, \\ 144, 288, 576, 152, 304, 608, 216, 432, 864, 728, 456, 912, \\ 824, 648, 296, 592, 184, 368, 736, 472, 944, 888, 776, 552, \\ 104, 208, 416, 832, 664, 328, 656, 312, 624, 248, 496, 992, \\ 984, 968, 936, 872, 744, 488, 976, 952, 904, 808, 616, 232, \\ 464, 928, 856, 712, 424, 848, 696, 392, 784, 568, 136, 272, \\ 544, 88, 176, 352, 704, 408, 816, 632, 264, 528, 56, 112, 224, \\ 448, 896, 792, 584, 168, 336, 672, 344, 688, 376, 752, 504. \end{gathered}$$

([S68] 141, Maple).

7.4.8. *Ciąg reszt z dzielenia przez* 10 000 *kolejnych liczb postaci* 2^n *jest okresowy. Okres nie jest czysty, rozpoczyna się od wyrazu czwartego i składa się z* 500 *wyrazów.*

Ciąg reszt z dzielenia przez 100 000 *kolejnych liczb postaci* 2^n *jest okresowy. Okres nie jest czysty, rozpoczyna się od wyrazu piątego i składa się z* 2500 *wyrazów.*

Dla dowolnej liczby naturalnej $k \geqslant 1$, *ciąg reszt z dzielenia przez* 10^k *kolejnych liczb postaci* 2^n *jest okresowy. Okres rozpoczyna się od* k*-tego wyrazu i składa się z* $4 \cdot 5^{k-1} = \varphi(5^k)$ *wyrazów.*

Powyższy fakt jest konsekwencją następującego, dobrze znanego, twierdzenia.

7.4.9. *Dla każdej liczby naturalnej k, najmniejszą liczbą naturalną m taką, że*

$$2^m \equiv 1 \pmod{5^k}$$

jest $m = \varphi(5^k) = 4 \cdot 5^{k-1}$.

U. Z twierdzenia Eulera wynika, że liczba $m = \varphi(5^k)$ spełnia kongruencję $2^m \equiv 1 \pmod{5^k}$. Mamy więc jeszcze dodatkową informację o tym, że $\varphi(5^k)$ jest najmniejszą liczbą naturalną posiadającą rozważaną własność. Mówi się w tym przypadku, że *wykładnikiem* (lub *rzędem*) liczby 2 modulo 5^k jest $\varphi(5^k)$. ⊠

Przy pomocy powyższych faktów łatwo udowodnić:

7.4.10. *Niech $k \in \mathbb{N}$. Ciąg k-tych od końca cyfr kolejnych wyrazów ciągu (2^n) jest okresowy. Okres składa się z $4 \cdot 5^{k-1}$ wyrazów.* ([Mat] 2/1952 60).

W dowodzie następnego faktu również wykorzystamy twierdzenie 7.4.9.

7.4.11. *Dla każdej liczby naturalnej k istnieje potęga dwójki, której k-cyfrowa końcówka składa się tylko z jedynek i dwójek.* ([Mon] 37(5)(1950) s.350, [ShCY] z.244 s.354).

D. ([Mon] 37(5)(1950) s.350). Zastosujemy indukcję matematyczną ze względu na k. To jest oczywiste dla $k = 1$ i $k = 2$. Mamy bowiem $2^1 = 2$ lub $2^5 = 32$ oraz $2^9 = 512$. Niech $k \geqslant 2$ i załóżmy, że istnieje liczba naturalna m taka, że k-cyfrowa końcówka liczby 2^m jest zbudowana tylko z cyfr należących do zbioru $\{1, 2\}$. Oznacza to, że

$$2^m \equiv z \pmod{10^k},$$

gdzie z jest k-cyfrową liczbą zbudowaną z cyfr należących do zbioru $\{1, 2\}$. Jest oczywiste, że $m \geqslant k+1$.

Wiemy, że $2^{\varphi(5^k)} \equiv 1 \pmod{5^k}$ (twierdzenie Eulera). Zatem $2^{i\varphi(5^k)} \equiv 1 \pmod{5^k}$, czyli $2^{i\varphi(5^k)} - 1 = 5^k u_i$ dla $i = 0, 1, 2, 3, 4$, gdzie u_i jest pewną liczbą całkowitą. Ponieważ $m \geqslant k + 1$, więc stąd otrzymujemy równości postaci

$$(*) \qquad 2^m \left(2^{i\varphi(5^k)} - 1\right) = 2 \cdot 10^k v_i,$$

gdzie $v_i \in \mathbb{Z}$, $i = 0, 1, 2, 3, 4$. Zatem $2^{m+i\varphi(5^k)} \equiv 2^m \equiv z \pmod{10^k}$. Wszystkie więc liczby $2^{m+i\varphi(5^k)}$, dla $i = 0, 1, 2, 3, 4$, mają tę samą końcówkę k-cyfrową i ta końcówka jest równa z, czyli jest zbudowana z cyfr należących do zbioru $\{1, 2\}$.

Oznaczmy przez a_i cyfrę stojącą na $(k+1)$ miejscu (licząc od końca) liczby $2^{m+i\varphi(5^k)}$. Z równości $(*)$ wynika, że $a_i \equiv a_j \pmod 2$ dla $i, j \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

Wykażemy, że cyfry a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 są parami różne. Przypuśćmy, że $a_i = a_j$ dla pewnych $i, j \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ takich, że $i > j$. Wtedy 5^{k+1} dzieli różnicę

$$2^{m+i\varphi(5^k)} - 2^{m+j\varphi(5^k)} = 2^{m+j\varphi(5^k)} \left(2^{(i-j)\varphi(5^k)} - 1\right)$$

i stąd $2^{(i-j)\varphi(5^k)} \equiv 1 \pmod{5^{k+1}}$. Ale

$$(i-j)\varphi(5^k) < 5\varphi(5^k) = \varphi(5^{k+1}).$$

Otrzymaliśmy więc sprzeczność z twierdzeniem 7.4.9.

Zatem cyfry a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 są parami różne i ponadto wszystkie są tej samej parzystości. Jeśli wszystkie są parzyste, to jedna z nich musi być równa 2. Jeśli natomiast wszystkie są nieparzyste, to jedna z nich musi być równa 1. Jedna zatem z liczb

$$2^{m+0\varphi(5^k)},\ 2^{m+1\varphi(5^k)},\ 2^{m+2\varphi(5^k)},\ 2^{m+3\varphi(5^k)},\ 2^{m+4\varphi(5^k)}$$

ma $(k+1)$-szą cyfrę (licząc od końca) równą albo 1 albo 2. Wszystkie natomiast te liczby mają k-cyfrową końcówkę równą z. Mamy więc potęgę dwójki z $(k+1)$-cyfrową końcówką zbudowaną z cyfr należących do zbioru $\{1, 2\}$. ⊠

7.4.12. *Dla każdej liczby naturalnej k istnieje potęga dwójki, której k-cyfrowa końcówka składa się tylko z cyfr 2 i 4.*

D. Niech m będzie taką liczbą naturalną, że k-cyfrowa końcówka liczby 2^m zbudowana jest z cyfr 1 i 2. Taka liczba m istnieje na mocy 7.4.11. Wtedy k-cyfrowa końcówka liczby $2^{m+1} = 2 \cdot 2^m$ jest zbudowana z cyfr 2 i 4. ⊠

Ponieważ $2^{12} \equiv 96 \pmod{100}$ i $2^{16} \equiv 36 \pmod{100}$, więc powtarzając dowód faktu 7.4.11 otrzymujemy:

7.4.13. *Dla każdej liczby naturalnej k istnieje potęga dwójki, której k-cyfrowa końcówka składa się tylko z niezerowych cyfr podzielnych przez 3.*

Z dowodu faktu 7.4.11 wynika również:

7.4.14. *Niech (a, b) będzie jedną z par*

$$(1,2),\ (1,6),\ (3,2),\ (3,6),\ (5,2),\ (5,6),\ (7,2),\ (7,6),\ (9,2),\ (9,6).$$

Dla każdej liczby naturalnej k istnieje potęga dwójki, której k-cyfrowa końcówka składa się tylko z a i b.

7.4.15. *Dla dowolnej liczby naturalnej $k > 1$ istnieje potęga liczby 2, w której wśród k ostatnich cyfr znajduje się 9.* ([Kw] 1/1995 M1450).

7.4.16. *Niech $k > 1$ będzie liczbą naturalną i niech c będzie dowolną cyfrą układu dziesiętnego. Istnieje wtedy liczba naturalna n taka, że k-tą od końca cyfrą liczby 2^n jest c.* ([S64] 161).

7.4.17. *Niech a_n oznacza $(n+1)$-szą od końca cyfrą liczby 2^{5^n}. Wykazać, że ciąg (a_n) nie jest okresowy.* ([OM] St Petersburg 1994).

7.4.18. *Istnieje nieskończenie wiele liczb naturalnych n takich, że ostatnie cyfry liczby 2^n przedstawiają liczbę n.* ([GaT] 18/78, [Zw] 1996).

U. Najmniejsze takie n jest równe 36. ⊠

---

ooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

7.5 Suma cyfr potęg dwójki

ooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

Przypomnijmy, że przez $s(n)$ oznaczamy sumę cyfr liczby naturalnej n.

7.5.1. $s(2^9) = 2^3$,
$s(2^{36}) = 2^6$,
$s(2^{85}) = 2^7$,
$s(2^{176}) = s(2^{194}) = s(2^{200}) = 2^8$,
$s(2^{375}) = 2^9$,
$s(2^{1517}) = s(2^{1523}) = 2^{11}$,
$s(2^{3042}) = 2^{12}$,
$s(2^{5953}) = s(2^{6043}) = s(2^{6109}) = 2^{13}$,
$s(2^{12\,068}) = s(2^{12\,104}) = 2^{14}$.
(Maple).

7.5.2. $s(2^5) = 5^1$,
$s(2^{16}) = s(2^{22}) = 5^2$,
$s(2^{75}) = s(2^{93}) = s(2^{105}) = 5^3$,
$s(2^{440}) = 5^4$,
$s(2^{2317}) = 5^4$,
$s(2^{57\,203}) = 5^7$. (Maple).

7.5.3. $s(2^4) = s(2^{10}) = 7^1$, $s(2^{1798}) = s(2^{1882}) = 7^4$. (Maple).

7.5.4. $s(2^7) = 11^1$, $s(2^{104}) = s(2^{110}) = 11^2$, $s(2^{957}) = s(2^{975}) = 11^3$, $s(2^{10\,990}) = 11^4$. (Maple).

7.5.5. *Dla n z przedziału $[1, 1000]$ największą liczbą postaci $s(2^n)$ jest* $1468 = s(2^{996})$. (Maple).

7.5.6. *Dla n z przedziału $[1, 10\,000]$ największą liczbą postaci $s(2^n)$ jest* $13\,921 = s(2^{9\,976})$. (Maple).

7.5.7. *Dla n z przedziału $[1, 60\,000]$ największą liczbą postaci $s(2^n)$ jest* $82\,490 = s(2^{59\,867})$. (Maple).

7.5.8. *Ciąg $(s(2^n) \bmod 9)$, $n \geqslant 0$, jest okresowy i ma czysty okres:* $1, 2, 4, 8, 7, 5$.

7.5.9. $s(2^{n+1}) \neq s(2^n)$, *dla wszystkich* $n \in \mathbb{N}$. ([MM] Q679).

D. Przypuśćmy, że zachodzi równość. Wtedy $s(a) = s(2a)$ dla $a = 2^n$. Mamy wówczas:

$$a = 2a - a \equiv s(2a) - s(a) = 0 \pmod 9,$$

czyli $9 \mid 2^n$, co jest sprzecznością. Wykorzystaliśmy kongruencję $b \equiv s(b) \pmod 9$ zachodzącą dla każdej liczby naturalnej b. ⊠

7.5.10. $s(2^n) \geqslant \log_4 n - 1$. ([S-kc]).

7.5.11. $s(2^n) < 3n + 9$.

D. Liczba 2^n ma dokładnie $[\log 2^n] + 1$ cyfr. Każda z tych cyfr jest co najwyżej dziewiątką. Ponadto, $\log 2 \approx 0.3010 < \frac{1}{3}$. Mamy zatem:

$$s(2^n) < 9\left([\log 2^n] + 1\right) = 9\left([n \log 2] + 1\right) \leqslant 9\left([n/3] + 1\right) \leqslant 9\left(n/3 + 1\right) = 3n + 9. \quad ⊠$$

7.5.12. *Istnieje liczba naturalna $n > 1000$ taka, że $s(2^n) > s(2^{n+1})$.* ([GaT] 18/76).

D. Wynika to z 7.5.13. ⊠

7.5.13. *Istnieje nieskończenie wiele liczb naturalnych n takich, że $s(2^n) > s(2^{n+1})$.* ([Kw] 2/1977 26).

D. ([Kw]). Przypuśćmy, że istnieje liczba naturalna s taka, że $s(2^{n+1}) \geqslant s(2^n)$ dla wszystkich $n \geqslant s$. Wówczas (patrz 7.5.9) $s(2^{n+1}) > s(2^n)$ dla $n \geqslant s$ i wtedy, na mocy 7.5.8, $s(2^{n+6}) \geqslant s(2^n) + 27$ dla $n \geqslant s$. Dla $n = s + 6k$ mamy zatem

$$s(2^n) = s(2^{s+6k}) \geqslant s(2^s) + 27k = s(2^s) + 27((n-s)/6) = s(2^s) - \frac{9}{2}s + \frac{9}{2}n$$

i ponadto, na mocy 7.5.11, $s(2^n) < 3n+9$. Zatem $-a+\frac{9}{2}n < 3n+9$, gdzie a jest stałą liczbą (niezależną od n) równą $\frac{9}{2}s - s(2^s)$. Stąd

$$\frac{3}{2}n < a + 9$$

dla wszystkich n postaci $s + 6k$, gdzie $k \in \mathbb{N}$. To jest oczywiście sprzecznością. ⊠

7.5.14.

$$s(2^3) > s(2^4) > s(2^5), \quad s(2^8) > s(2^9) > s(2^{10});$$
$$s(2^{39}) > s(2^{40}) > s(2^{41}) > s(2^{42}), \quad s(2^{55}) > s(2^{56}) > s(2^{57}) > s(2^{58});$$
$$s(2^{74}) > s(2^{75}) > s(2^{76}) > s(2^{77}) > s(2^{78});$$
$$s(2^{245}) > s(2^{246}) > s(2^{247}) > s(2^{248}) > s(2^{249}) > s(2^{250});$$
$$s(2^{1637}) > s(2^{1638}) > s(2^{1639}) > s(2^{1640}) > s(2^{1641}) > s(2^{1642}) > s(2^{1643});$$
$$s(2^{1980}) > s(2^{1981}) > s(2^{1982}) > s(2^{1983}) > s(2^{1984}) > s(2^{1985}) > s(2^{1986}) > s(2^{1987});$$
$$s(2^{18470}) > s(2^{18471}) > \cdots > s(2^{18478}).$$ (Maple).

7.5.15.

$$s(2^1) < s(2^2) < s(2^3),$$
$$s(2^5) < s(2^6) < s(2^7) < s(2^8),$$
$$s(2^{10}) < s(2^{11}) < s(2^{12}) < s(2^{13}) < s(2^{14}) < s(2^{15}),$$
$$s(2^{771}) < s(2^{772}) < s(2^{773}) < s(2^{774}) < s(2^{775}) < s(2^{776}) < s(2^{777}),$$
$$s(2^{5124}) < s(2^{5125}) < s(2^{5126}) < s(2^{5127}) < s(2^{5128}) < s(2^{5129}) < s(2^{5130}) < s(2^{5131}),$$
$$s(2^{9343}) < s(2^{9344}) < \cdots < s(2^{8351}).$$ (Maple).

7.5.16. $\lim\limits_{n\to\infty} s(2^n) = \infty$. ([KoM] 1999(10) A220).

---

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

7.6 Cyfry liczb podzielnych przez potęgę dwójki

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

7.6.1. *Istnieje liczba naturalna q taka, że wszystkie cyfry liczby $q2^{100}$ są różne od zera.* Dowód. *Patrz* 7.6.4. ([GaT] 18/67).

7.6.2. *Dla każdej liczby naturalnej n istnieje liczba podzielna przez 2^n, której wszystkie cyfry są jedynkami lub dwójkami.* ([WaJ] 144(71), [Kw] 8/1972 60).

7.6.3. *Istnieje liczba 100-cyfrowa podzielna przez 2^{100}, której wszystkie cyfry są jedynkami lub dwójkami.* Dowód. *Patrz* 7.6.4. ([OM] ZSRR 1971).

7.6.4. *Dla każdej liczby naturalnej n istnieje liczba n-cyfrowa podzielna przez 2^n, której wszystkie cyfry są jedynkami lub dwójkami.* ([OM] ZSRR 1971).

D. Jest to szczególny przypadek faktu 7.6.6. Podamy teraz inny dowód.
Oznaczmy tę szukaną liczbę przez a_n. Przykłady: $a_1 = 2$, $a_2 = 12$, $a_3 = 112$.
Krok indukcyjny. Załóżmy, że $a_n = 2^n b_n$, $b_n \in \mathbb{N}$. Jeśli b_n jest liczbą nieparzystą, to liczba

$$\overline{1a_n} = 10^n + a_n = 2^n 5^n + 2^n b_n = 2^n(5^n + b_n)$$

dzieli się przez 2^{n+1} i koniec. Jeśli b_n jest liczbą parzystą, to liczba

$$\overline{2a_n} = 2 \cdot 10^n + a_n = 2 \cdot 10^n + 2^n b_n = 2^n(2 \cdot 5^n + b_n)$$

dzieli się przez 2^{n+1}. ⊠

7.6.5. *Niech a i b będą cyframi różnej parzystości. Dla każdej liczby naturalnej n istnieje liczba podzielna przez 2^n, w której zapisie dziesiętnym występują tylko cyfry a i b.* Dowód. *Patrz* 7.6.6. ([Kw] M1733 s.17, [Balt] 1998).

7.6.6. *Niech a i b będą cyframi różnej parzystości. Dla każdej liczby naturalnej n istnieje dokładnie jedna n-cyfrowa liczba naturalna podzielna przez 2^n, w której zapisie dziesiętnym występują tylko cyfry a i b.* ([Crux] 1998 s.185 z.2226).

D. Istnieje 2^n różnych liczb n-cyfrowych utworzonych z cyfr a i b. Wystarczy pokazać, że każde dwie różne takie liczby N_1 i N_2 mają różne reszty z dzielenia przez 2^n. Załóżmy, że pierwsza różna cyfra (licząc z prawa do lewa) występuje przy 10^k, gdzie $0 \leqslant k \leqslant n-1$ i załóżmy że N_1 ma na tym miejscu cyfrę a, a N_2 ma na tym miejscu cyfrę b. Wtedy $N_1 - N_2 \equiv (a-b)10^k = (a-b)5^k 2^k \pmod{10^{k+1}}$. Liczba $(a-b)5^k$ jest nieparzysta, więc 2^n nie dzieli różnicy $N_1 - N_2$. ⊠

7.6.7. *Niech (a, b) będzie jedną z par: $(2, 4)$, $(2, 8)$, $(4, 6)$, $(6, 8)$. Dla każdej liczby naturalnej n istnieje dokładnie jedna n-cyfrowa liczba naturalna podzielna przez 2^{n+1}, w której zapisie dziesiętnym występują tylko cyfry a i b.* ([Crux] 1998 s.185).

7.6.8. *Dla każdej liczby naturalnej n istnieje dokładnie jedna n-cyfrowa liczba naturalna podzielna przez 2^{n+2}, w której zapisie dziesiętnym występują tylko cyfry* 4 *i* 8. ([Crux] 1998 s.185).

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

7.7 Wielomiany i potęgi dwójki

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

Niech n będzie ustaloną liczbą naturalną. W tym podrozdziale zajmować się będziemy takimi wielomianami $f(x)$, dla których wszystkie wartości $f(0)$, $f(1)$, $f(2), \dots, f(n)$ są potęgami dwójki. Interesować nas będą głównie wielomiany stopni co najwyżej równych n. Udowodnimy między innymi, że dla każdej liczby naturalnej n, istnieją tego typu wielomiany, których wszystkie współczynniki są liczbami całkowitymi oraz liczby $f(0), f(1), \dots, f(n)$ są parami różnymi potęgami dwójki.

Istotną rolę w tym podrozdziale odgrywać będą następujące klasyczne twierdzenia.

7.7.1. *Niech $n \in \mathbb{N}$. Niech $u_0, u_1, \dots, u_n$ będą parami różnymi liczbami rzeczywistymi oraz niech $b_0, b_1, \dots, b_n$ będą liczbami rzeczywistymi. Istnieje wtedy dokłanie jeden taki wielomian $f(x)$, o współczynnikach rzeczywistych i stopnia co najwyżej równego n, że*

$$f(u_0) = b_0,\ f(u_1) = b_1,\ \dots,\ f(u_n) = b_n.$$

Jeśli $u_0, u_1, \dots, u_n, b_0, b_1, \dots, b_n$ są liczbami wymiernymi, to wszystkie współczynniki wielomianu $f(x)$ są również liczbami wymiernymi.

D. Niech $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$, będzie wielomianem stopnia $\leqslant n$, którego wszystkie współczynniki $a_0, a_1, \dots, a_n$ są liczbami rzeczywistymi. Załóżmy, że $f(u_i) = b_i$ dla wszystkich $i = 0, 1, \dots, n$. Wtedy liczby $a_0, \dots, a_n$ spełniają następujący układ równań:

$$\left\{\begin{array}{rcl} a_0 + a_1u_0 + a_2u_0^2 + \cdots + a_nu_0^n &=& b_0, \\ a_0 + a_1u_1 + a_2u_1^2 + \cdots + a_nu_1^n &=& b_1, \\ \vdots && \\ a_0 + a_1u_n + a_2u_n^2 + \cdots + a_nu_n^n &=& b_n. \end{array}\right.$$

Mamy $(n+1)$ równań oraz $(n+1)$ niewiadomych $a_0, a_1, \dots, a_n$. Macierzą główną tego układu jest macierz

$$V = \begin{bmatrix} 1 & u_0 & u_0^2 & \cdots & u_0^n \\ 1 & u_1 & u_1^2 & \cdots & u_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & u_n & u_n^2 & \cdots & u_n^n \end{bmatrix},$$

której wyznacznik jest znanym wyznacznikiem Vandermonde'a, równym

$$\prod_{0 \leqslant i < j \leqslant n} (u_j - u_i).$$

Informację o tym znajdziemy w podstawowych książkach z algebry wyższej (patrz na przykład [MoS] lub [JeL]). Wyznacznik ten jest oczywiście liczbą różną od zera. Powyższy układ równań jest więc układem Cramera; posiada więc dokładnie jedno rozwiązanie. Istnieje zatem dokładnie jeden wielomian $f(x)$ spełniający rozpatrywane warunki.

Jeśli $u_0, u_1, \dots, u_n, b_0, b_1, \dots, b_n$ są liczbami wymiernymi, to wyznacznik macierzy V jest niezerową liczbą wymierną i ze znanych wzorów Cramera wynika, że wtedy $a_0, \dots, a_n$ są liczbami wymiernymi. Wszystkie współczynniki rozważanego wielomianu $f(x)$ są więc wtedy liczbami wymiernymi. ⊠

U. W powyższym twierdzeniu założyliśmy, że $u_0, u_1, \ldots, u_n, b_0, b_1, \ldots, b_n$ są liczbami rzeczywistymi (lub wymiernymi). Wystarczy założyć, że są to elementy dowolnego ciała K i powtórzyć ten sam dowód. Wtedy rozpatrywany wielomian $f(x)$ ma współczynniki należące do K. Uwaga ta dotyczy również następnego twierdzenia. ⊠

Wielomian $f(x)$, o którym mowa w twierdzeniu 7.7.1, można podać w jawny sposób. Załóżmy, że $u_0, u_1, \ldots, u_n$ są parami różnymi liczbami rzeczywistymi (lub elementami dowolnego ciała K). Niech $L_0(x), L_1(x), \ldots, L_n(x)$ będą wielomianami o współczynnikach rzeczywistych (lub odpowiednio o współczynnikach należących do K), zdefiniowanymi następująco:

$$\begin{aligned} L_k(x) &= \Big(x-u_0\Big)\Big(x-u_1\Big)\cdots\Big(x-u_{k-1}\Big)\Big(x-u_{k+1}\Big)\cdots\Big(x-u_n\Big) \\ &= (x-u_0)(x-u_1)\cdots\widehat{(x-u_k)}\cdots(x-u_n), \end{aligned}$$

dla wszystkich $k = 0, 1, \ldots, n$. Są to wielomiany n-tego stopnia. Zauważmy, że jeśli $k, i \in \{0, 1, \ldots, n\}$, to $L_k(u_k) \neq 0$ oraz $L_k(u_i) = 0$ dla $i \neq k$.

7.7.2 (Twierdzenie Lagrange'a)**.** *Niech $n \in \mathbb{N}$. Niech $u_0, u_1, \ldots, u_n$ będą parami różnymi liczbami rzeczywistymi oraz niech $b_0, b_1, \ldots, b_n$ będą liczbami rzeczywistymi. Istnieje wtedy dokładnie jeden taki wielomian $f(x)$, o współczynnikach rzeczywistych i stopnia co najwyżej równego n, że $f(u_0) = b_0,\ f(u_1) = b_1,\ \ldots,\ f(u_n) = b_n$. Zachodzi ponadto równość*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{b_k}{L_k(k)} L_k(x),$$

gdzie $L_0(x), \ldots, L_n(x)$ są wielomianami zdefiniowanymi powyżej.

D. Niech $g(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{b_k}{L_k(k)} L_k(x)$. Stopień wielomianu $g(x)$ jest co najwyżej równy n oraz $g(u_i) = b_i$ dla $i = 0, 1, \ldots, n$. Zatem, na mocy twierdzenia 7.7.1, wielomiany $f(x)$ i $g(x)$ są równe. ⊠

Równość podana w twierdzeniu 7.7.2 nazywa się *wzorem interpolacyjnym Lagrange'a.* Dla $n = 1$ wzór ten ma postać

$$f(x) = \frac{b_0}{u_0 - u_1}(x - u_1) + \frac{b_1}{u_1 - u_0}(x - u_0).$$

Natomiast dla $n = 2$ mamy:

$$f(x) = \frac{b_0(x-u_1)(x-u_2)}{(u_0-u_1)(u_0-u_2)} + \frac{b_1(x-u_0)(x-u_2)}{(u_1-u_0)(u_1-u_2)} + \frac{b_2(x-u_0)(x-u_1)}{(u_2-u_0)(u_2-u_1)}.$$

Niech teraz $u_0, u_1, \ldots, u_n$ będą liczbami odpowiednio równymi $0, 1, \ldots, n$ i wielomiany $L_0(x), L_1(x), \ldots, L_n(x)$, odpowiadające tym liczbom, oznaczmy odpowiednio przez $H_0(x)$, $H_1(x)$, …, $H_n(x)$. Mamy zatem:

$$\begin{aligned} H_k(x) &= \Big(x-0\Big)\Big(x-1\Big)\cdots\Big(x-(k-1)\Big)\Big(x-(k+1)\Big)\Big(x-(k+2)\Big)\cdots\Big(x-n\Big) \\ &= (x-0)(x-1)\cdots\widehat{(x-k)}\cdots(x-n), \end{aligned}$$

dla $k = 0, 1, \ldots, n$. Są to wielomiany n-tego stopnia o współczynnikach całkowitych. Zauważmy, że jeśli $k, i \in \{0, 1, \ldots, n\}$, to

$$H_k(i) = \begin{cases} 0, & \text{gdy } i \neq k, \\ (-1)^{n-k} k!(n-k)!, & \text{gdy } i = k. \end{cases}$$

Załóżmy jeszcze dodatkowo, że wszystkie liczby $b_0, b_1, \ldots, b_n$, występujące w twierdzeniach 7.7.1 i 7.7.2 są wymierne. W rozważanym przypadku twierdzenie Lagrange'a 7.7.2, ma zatem następującą postać.

7.7.3. *Niech $n \in \mathbb{N}$. oraz niech $b_0, b_1, \ldots, b_n$ będą liczbami wymiernymi. Istnieje wtedy dokłanie jeden taki wielomian $f(x)$, o współczynnikach wymiernych i stopnia co najwyżej równego n, że $f(0) = b_0,\ f(1) = b_1,\ \ldots,\ f(n) = b_n$. Zachodzi ponadto równość*

$$f(x) = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} b_k H_k(x),$$

gdzie $H_0(x), \ldots, H_n(x)$ są wielomianami zdefiniowanymi powyżej. Niech

$$a = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} b_k.$$

Jeśli liczba a jest różna od zera, to $f(x)$ jest wielomianem n-tego stopnia i jego współczynnikiem wiodącym jest $\frac{a}{n!}$.

Niech $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$ będzie tym wielomianem, o którym mowa w powyższym twierdzeniu. Liczby $a_0, \ldots, a_n$ są wymierne i spełniają układ równań (patrz dowód twierdzenia 7.7.1):

$$\begin{cases} a_0 & & & & & & & & & & & = & b_0, \\ a_0 & + & a_1 & + & a_2 & + & a_3 & + \ldots + & a_n & = & b_1, \\ a_0 & + & 2a_1 & + & 2^2 a_2 & + & 2^3 a_3 & + \ldots + & 2^n a_n & = & b_2, \\ a_0 & + & 3a_1 & + & 3^2 a_2 & + & 3^3 a_3 & + \ldots + & 3^n a_n & = & b_3, \\ & & & & \vdots & & & & & & \\ a_0 & + & na_1 & + & n^2 a_2 & + & n^3 a_3 & + \ldots + & n^n a_n & = & b_n, \end{cases},$$

którego macierzą główną jest $(n+1) \times (n+1)$ macierz

$$M_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 2 & 2^2 & 2^3 & \ldots & 2^n \\ 1 & 3 & 3^2 & 3^3 & \ldots & 3^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & n & n^2 & n^3 & \ldots & n^n \end{bmatrix}.$$

Oznaczmy przez d_n wyznacznik macierzy M_n. Jak już wspominaliśmy, jest to wyznacznik Vandermonde'a, który w tym przypadku jest liczbą naturalną

$$d_n = \prod_{0 \leqslant i < j \leqslant n} (j - i).$$

Przykłady: $d_1 = 1$, $d_2 = 2$, $d_3 = 12$, $d_4 = 288$, $d_5 = 34560$, $d_6 = 24883200$, $d_7 = 125411328000$, $d_8 = 5056584744960000$.

Ponieważ $d_n \neq 0$, macierz M_n posiada macierz odwrotną M_n^{-1}. Niech

$$M_n^{-1} = [w_{ij}]_{0 \leqslant i \leqslant n, 0 \leqslant j \leqslant n}.$$

Ze znanych wzorów dla macierzy odwrotnej wynika, że dla wszystkich $i, j \in \{0, 1, \dots, n\}$ zachodzi równość

$$w_{ij} = \frac{t_{ij}}{d_n},$$

gdzie każde t_{ij} jest pewną liczbą całkowitą. W dalszym ciągu wykorzystamy następujący lemat.

7.7.4. *Przy powyższych założeniach i oznaczeniach:*

$$\sum_{j=0}^{n} t_{ij} = \begin{cases} d_n, & \text{gdy} \ \ i = 0, \\ 0, & \text{gdy} \ \ i > 0, \end{cases}$$

dla wszystkich $i = 0, 1, \dots, n$.

D. Rozpatrzmy $(n+1) \times 1$ macierze $A = [1, 0, \dots, 0]^T$ oraz $B = [1, 1, \dots, 1]^T$. Zauważmy, że $M_n A = B$. Zatem $M_n^{-1} B = A$ i stąd wynika teza. ⊠

Teraz dopiero zajmiemy się potęgami dwójki. Z twierdzenia 7.7.3, zastosowanego dla ciągu $(b_0, b_1, \dots, b_n) = (1, 2, 4, \dots, 2^n)$, otrzymujemy następujące twierdzenie.

7.7.5. *Dla każdej liczby naturalnej n istnieje dokładnie jeden taki wielomian $F_n(x)$, stopnia co najwyżej równego n, że*

$$F_n(i) = 2^i \quad \text{dla} \ \ i = 0, 1, \dots, n.$$

Ponadto, wielomian $F_n(x)$ jest n-tego stopnia, wszystkie jego współczynniki są liczbami wymiernymi, współczynnikiem wiodącym jest $\frac{1}{n!}$ oraz zachodzi równość

$$F_n(x) = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} 2^k H_k(x),$$

gdzie $H_k(x) = (x-0)(x-1)\cdots\widehat{(x-k)}\cdots(x-n)$ *dla wszystkich* $k = 0, 1, \dots, n$.

7.7.6. *Przykłady wielomianów $F_n(x)$ dla $n \leqslant 6$.*

$$\begin{aligned}
F_1(x) &= x + 1, \\
F_2(x) &= \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{2}x + 1, \\
F_3(x) &= \tfrac{1}{6}x^3 + \tfrac{5}{6}x + 1, \\
F_4(x) &= \tfrac{1}{24}x^4 - \tfrac{1}{12}x^3 + \tfrac{11}{24}x^2 + \tfrac{7}{12}x + 1, \\
F_5(x) &= \tfrac{1}{120}x^5 - \tfrac{1}{24}x^4 + \tfrac{5}{24}x^3 + \tfrac{1}{24}x^2 + \tfrac{47}{60}x + 1, \\
F_6(x) &= \tfrac{1}{720}x^6 - \tfrac{1}{80}x^5 + \tfrac{11}{144}x^4 - \tfrac{5}{48}x^3 + \tfrac{19}{45}x^2 + \tfrac{37}{60}x + 1.
\end{aligned}$$

7.7.7. *Niech $f(x)$ będzie takim wielomianem stopnia $\leqslant n$, że $f(i) = 2^i$ dla $i = 0, 1, \dots, n$. Wtedy $f(n+1) = 2^{n+1} - 1$.* ([Mock] 1996).

D. Wykazaliśmy wcześniej, że taki wielomian $f(x)$ istnieje dokładnie jeden oraz że jego stopień jest równy n i jego współczynnik wiodący jest równy $a = \frac{1}{n!}$. Rozpatrzmy wielomian

$$g(x) = 2f(x) - f(x+1),$$

Jet to wielomian n-tego stopnia. Jego współczynnikiem wiodącym jest a oraz liczby $0, 1, \dots, (n-1)$ są jego pierwiastkami. Zatem $g(x) = ax(x-1)(x-2)\cdots(x-n+1)$ i mamy:

$$2^{n+1} - f(n+1) = 2f(n) - f(n+1) = g(n) = a \cdot n! = \frac{1}{n!} \cdot n! = 1,$$

a zatem $f(n+1) = 2^{n+1} - 1$. ⊠

7.7.8. *Niech $f(x)$ będzie takim wielomianem stopnia $\leqslant n$, że $f(i) = 2^i$ dla $i = 0, 1, \dots, n$. Wtedy $f(n+2) = 2^{n+2} - n - 3$ oraz $f(n+3) = 2^{n+3} - \frac{n^2+7n+14}{2}$.*

D. W poprzednim dowodzie wykazaliśmy, że

$$f(x+1) = 2f(x) - \frac{1}{n!}x(x-1)(x-2)\cdots(x-n+1)$$

oraz $f(n+1) = 2^{n+1} - 1$. Zatem $f(n+2) = 2f(n+1) - \frac{1}{n!}(n+1)! = 2(2^{n+1}-1) - (n+1) = 2^{n+2} - n - 3$ i w tak samo wykazujemy, że $f(n+3) = 2^{n+3} - \frac{n^2+7n+14}{2}$. ⊠

W podobny sposób można udowodnić:

7.7.9. *Niech $h(x)$ będzie takim wielomianem stopnia $2n$, że $h(0) = 1$ oraz $h(i) = 2^i$ dla $i = 1, 2, \dots, 2n$. Wtedy $2hf(n+1) - h(2n+2) = 1$.* ([Crux] 2005 s.35).

Wszystkie rozpatrywane dotąd wielomiany, związane z potęgami dwójki, miały wymierne współczynniki. W następnym stwierdzeniu pojawią się wielomiany o współczynnikach całkowitych.

7.7.10. *Dla każdej liczby naturalnej n istnieje taki wielomian $f(x)$, o współczynnikach całkowitych i stopnia co najwyżej równego n, że wszystkie liczby $f(0), f(1), f(2), \dots, f(n)$ są parami różnymi potęgami dwójki.* ([OM] Węgry 1999, Iran 2000).

D. ([Crux] 2005 s.222). Stosujemy oznaczenia wprowadzone w tym podrozdziale po twierdzeniu 7.7.3. Wiemy, że wyznacznik d_n (macierzy M_n) jest liczbą naturalną. Niech $d_n = 2^a b$, gdzie $0 \leqslant a \in \mathbb{Z}$ oraz $b \in \mathbb{N}$, $2 \nmid b$. Ponieważ liczby b i 2 są względnie pierwsze, więc (na mocy twierdzenia Eulera) istnieje taka liczba naturalna w, że $2^w \equiv 1 \pmod{b}$. Wtedy $2^{kw} \equiv 1 \pmod{b}$ dla wszystkich $k = 0, 1, \dots, n$. Istnieją więc takie liczby całkowite $c_0, c_1, \dots, c_n$, że

$$2^{kw} = 1 + c_k b,$$

dla $k = 0, 1, \dots, n$. Niech $a_0, a_1, dots, a_n$ będą liczbami zdefiniowanymi za pomocą macierzowej równości:

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = M_n^{-1} \begin{bmatrix} 2^a \\ 2^{a+w} \\ 2^{a+2w} \\ \vdots \\ 2^{a+nw} \end{bmatrix}.$$

Liczby $a_0, a_1, \dots, a_n$ są oczywiście wymierne. Wykażemy, że są to liczby całkowite. Przypomnijmy, że $M_n^{-1} = \left[\frac{t_{ij}}{d_n}\right]_{0\leqslant i\leqslant n, 0\leqslant j\leqslant n}$, gdzie każde t_{ij} jest pewną liczbą całkowitą. Mamy zatem:

$$\begin{aligned} a_i &= \sum_{j=0}^n \frac{t_{ij}}{d_n} 2^{a+jw} = \sum_{j=0}^n \frac{t_{ij}}{d_n} 2^a 2^{jw} = \sum_{j=0}^n \frac{t_{ij}}{d_n} 2^a (1+c_j b) \\ &= 2^a \frac{1}{d_n} \sum_{j=0}^n t_{ij} + \sum_{j=0}^n \frac{t_{ij}}{d_n} c_j (2^a b) = 2^a \frac{1}{d_n} \sum_{j=0}^n t_{ij} + \sum_{j=0}^n \frac{t_{ij}}{d_n} c_j d_n \\ &= 2^a \frac{1}{d_n} \sum_{j=0}^n t_{ij} + \sum_{j=0}^n t_{ij} c_j \end{aligned}$$

Wiemy (patrz 7.7.4), że $\frac{1}{d_n}\sum_{j=0}^n t_{ij}$ jest liczbą całkowitą. Zatem każde a_i, dla $i = 0, 1, \dots, n$, jest liczbą całkowitą. Mamy więc wielomian $f(x) = a_0 + a_1 + \dots + a_n x^n$ taki, że $f(0) = 2^a$, $f(1) = 2^{a+w}$, $\dots$, $f(n) = 2^{2+nw}$. Wszystkie liczby $f(0), f(1), \dots, f(n)$ są parami różnymi potęgami dwójki oraz $\deg f(x) \leqslant n$. ⊠

Zanotujmy pewne inne stwierdzenia lub zadania o wielomianach i potęgach dwójki.

7.7.11. *Niech $f(x)$ będzie wielomianem jednej zmiennej o współczynnikach naturalnych. Jeżeli dla każdej liczby naturalnej n liczba $f(n)$ jest potęgą dwójki, to wielomian $f(x)$ jest stały.* ([S-kg] 67).

7.7.12. *Niech $f(x)$ będzie takim wielomianem o nieujemnych współczynnikach, że $f(4) = 2$ i $f(16) = 8$. Wykazać, że $f(8) \leqslant 4$. Znaleźć taki wielomian, że $f(8) = 4$.* ([OM] Irlandia 2000).

7.7.13. *Ciąg $(f_n(x))$ wielomianów zmiennej x jest zdefiniowany rekurencyjnie w następujący sposób:*

$$\begin{aligned} f_0(x) &= 1 \\ f_1(x) &= x+1 \\ (n+1)f_{n+1}(x) &= (x+1)f_n(x) - (x-n)f_{n-1}(x), \quad (n = 1, 2, \dots) \end{aligned}$$

Wtedy $f_n(n) = 2^n$ dla wszystkich $n \geqslant 0$. ([Ibe] 1998).

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

7.8 Wielomiany i potęgi liczby pierwszej

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

W poprzednim podrozdziale udowodniliśmy ogólne twierdzenia, za pomocą których otrzymaliśmy pewne twierdzenia o wielomianach i potęgach dwójki. Dokonując drobnych modyfikacji można w ten sam sposób otrzymać twierdzenia o wielomianach i potęgach dowolnej liczby naturalnej. Zrobimy to teraz dla potęg liczby pierwszej.

Z twierdzenia 7.7.3, zastosowanego dla ciągu $(b_0, b_1, \dots, b_n) = (1, p, p^2, \dots, p^n)$, otrzymujemy następujące twierdzenie.

7.8.1. *Niech p będzie liczbą pierwszą. Dla każdej liczby naturalnej n istnieje dokładnie jeden taki wielomian $F_n(x)$, stopnia co najwyżej równego n, że*

$$F_n(i) = p^i \quad dla \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

Ponadto, wielomian $F_n(x)$ jest n-tego stopnia, wszystkie jego współczynniki są liczbami wymiernymi, współczynnikiem wiodącym jest $\frac{(p-1)^n}{n!}$ oraz zachodzi równość

$$F_n(x) = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}p^k H_k(x),$$

gdzie $H_k(x) = (x-0)(x-1)\cdots\widehat{(x-k)}\cdots(x-n)$ dla wszystkich $k = 0, 1, \dots, n$.

7.8.2. *Niech p będzie liczbą pierwszą. Niech $f(x)$ będzie takim wielomianem stopnia $\leqslant n$, że $f(i) = p^i$ dla $i = 0, 1, \dots, n$. Wtedy $f(n+1) = p^{n+1} - (p-1)^{n+1}$.*

D. Wykazaliśmy wcześniej, że taki wielomian $f(x)$ istnieje dokładnie jeden oraz że jego stopień jest równy n i jego współczynnik wiodący jest równy $a = \frac{(p-1)^n}{n!}$. Rozpatrzmy wielomian

$$g(x) = pf(x) - f(x+1),$$

Jet to wielomian n-tego stopnia. Jego współczynnikiem wiodącym jest liczba $a(p-1)$ oraz liczby $0, 1, \dots, (n-1)$ są jego pierwiastkami. Zatem $g(x) = a(p-1)x(x-1)(x-2)\cdots(x-n+1)$ i mamy:

$$p^{n+1} - f(n+1) = pf(n) - f(n+1) = g(n) = a(p-1)\cdot n! = (p-1)\frac{(p-1)^n}{n!}\cdot n! = (p-1)^{n+1},$$

a zatem $f(n+1) = p^{n+1} - (p-1)^{n+1}$. ⊠

7.8.3. *Niech p będzie liczbą pierwszą i niech $f(x)$ będzie takim wielomianem stopnia $\leqslant n$, że $f(i) = p^i$ dla $i = 0, 1, \dots, n$. Wtedy $f(n+2) = p^{n+2} - (p+n+1)(p-1)^{n+1}$.*

D. W poprzednim dowodzie wykazaliśmy, że

$$f(x+1) = pf(x) - \frac{(p-1)^{n+1}}{n!}x(x-1)(x-2)\cdots(x-n+1)$$

oraz $f(n+1) = p^{n+1} - (p-1)^{n+1}$. Zatem

$$\begin{aligned} f(n+2) &= pf(n+1) - \tfrac{(p-1)^{n+1}}{n!}(n+1)! = p\left(p^{n+1} - (p-1)^{n+1}\right) - (n+1)(p-1)^{n+1} \\ &= p^{n+2} - (p+n+1)(p-1)^{n+1} \end{aligned}$$

i to kończy dowód. ⊠

7.8.4. *Niech p będzie liczbą pierwszą. Dla każdej liczby naturalnej n istnieje taki wielomian $f(x)$, o współczynnikach całkowitych i stopnia co najwyżej równego n, że wszystkie liczby $f(0), f(1), f(2), \dots, f(n)$ są parami różnymi potęgami liczby p.*

D. Stosujemy oznaczenia wprowadzone w poprzednim podrozdziale po twierdzeniu 7.7.3. Wiemy, że wyznacznik d_n (macierzy M_n) jest liczbą naturalną. Niech $d_n = p^a b$, gdzie $0 \leqslant a \in \mathbb{Z}$ oraz $b \in \mathbb{N}$, $p \nmid b$. Ponieważ liczby b i p są względnie pierwsze, więc (na mocy twierdzenia Eulera) istnieje taka liczba naturalna w, że $p^w \equiv 1 \pmod{b}$. Wtedy $p^{kw} \equiv 1 \pmod{b}$ dla wszystkich $k = 0, 1, \dots, n$. Istnieją więc takie liczby całkowite $c_0, c_1, \dots, c_n$, że

$$p^{kw} = 1 + c_k b,$$

dla $k = 0, 1, \dots, n$. Niech $a_0, a_1, dots, a_n$ będą liczbami zdefiniowanymi za pomocą macierzowej równości:

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = M_n^{-1} \begin{bmatrix} p^a \\ p^{a+w} \\ p^{a+2w} \\ \vdots \\ p^{a+nw} \end{bmatrix}.$$

Liczby $a_0, a_1, \dots, a_n$ są oczywiście wymierne. Wykażemy, że są to liczby całkowite. Przypomnijmy, że $M_n^{-1} = \left[\frac{t_{ij}}{d_n}\right]_{0 \leqslant i \leqslant n, 0 \leqslant j \leqslant n}$, gdzie każde t_{ij} jest pewną liczbą całkowitą. Mamy zatem:

$$\begin{aligned} a_i &= \sum_{j=0}^n \frac{t_{ij}}{d_n} p^{a+jw} = \sum_{j=0}^n \frac{t_{ij}}{d_n} p^a p^{jw} = \sum_{j=0}^n \frac{t_{ij}}{d_n} p^a (1 + c_j b) \\ &= p^a \frac{1}{d_n} \sum_{j=0}^n t_{ij} + \sum_{j=0}^n \frac{t_{ij}}{d_n} c_j (p^a b) = p^a \frac{1}{d_n} \sum_{j=0}^n t_{ij} + \sum_{j=0}^n \frac{t_{ij}}{d_n} c_j d_n \\ &= p^a \frac{1}{d_n} \sum_{j=0}^n t_{ij} + \sum_{j=0}^n t_{ij} c_j \end{aligned}$$

Wiemy (patrz 7.7.4), że $\frac{1}{d_n} \sum_{j=0}^n t_{ij}$ jest liczbą całkowitą. Zatem każde a_i, dla $i = 0, 1, \dots, n$, jest liczbą całkowitą. Mamy więc wielomian $f(x) = a_0 + a_1 + \cdots + a_n x^n$ taki, że $f(0) = p^a$, $f(1) = p^{a+w}$, ..., $f(n) = p^{2+nw}$. Wszystkie liczby $f(0), f(1), \dots, f(n)$ są parami różnymi potęgami liczby pierwszej p oraz $\deg f(x) \leqslant n$. ⊠

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

7.9 Różne zadania i fakty z potęgami dwójki

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

7.9.1. *Znaleźć resztę z dzielenia liczby* $2^{49!}$ *przez* $107 \cdot 109$. Odp. 1200. ([Mat] 5/1988 290).

7.9.2. *Rozpatrzmy reszty z dzielenia liczby* 2^n*, gdzie* $n > 1970$*, przez* $2, 3, 4, \dots, n$*. Wykazać, że suma tych reszt jest większa od* $2n$. ([Kw] 5/1971 33, [GaT] 39/70, [OM] Polska 42/1).

7.9.3. *Niech* $a_n = 2^{2^{\cdot^{\cdot^{2}}}}$ *(n dwójek). Wykazać, że* $a_n \equiv a_{n-1} \pmod{n}$. ([Putn] 1997).

7.9.4 (Kaplansky)**.** *Jeśli* $n \in \mathbb{N}$*, to następujące dwa warunki są równoważne.*

(1) *Liczba n jest potęgą dwójki.*

(2) *Dla dowolnych liczb naturalnych* $0 < a < b < n$ *liczba* $a + (a+1) + (a+2) + \cdots + b$ *nie jest podzielna przez n.* ([San2] 57).

7.9.5. *Dla każdej liczby naturalnej n istnieje* $s \in \mathbb{N}$ *takie, że* $n \leqslant 2^s \leqslant 2n$. ([San2] 7).

7.9.6. *Dla każdej liczby naturalnej* $n \geqslant 3$ *istnieją nieparzyste liczby naturalne x i y takie, że* $2^n = 7x^2 + y^2$. ([OM] Moskwa 1985, [ME] 7/2 2002).

7.9.7. *Każda liczba postaci A/B, gdzie*

$$A = \prod_{k=1}^{2n-1} k^{\min(k, 2n-k)}, \quad B = \prod_{k=1}^{n-1} (2k+1)^{2n-2k-1},$$

jest potęgą dwójki. ([G-kp] 176(56)).

7.9.8. *Żadna liczba postaci* $(36a+b)(36b+a)$, *gdzie* $a, b \in \mathbb{N}$, *nie jest potęgą dwójki.* ([A-P] 1998).

7.9.9. *Jeśli* $n \in \mathbb{N}$, *to przez* $f(n)$ *oznaczamy liczbę wszystkich sposobów przedstawienia liczby* n *w postaci sumy potęg dwójki z nieujemnymi wykładnikami. Przedstawienia różniące się tylko porządkiem uważamy za identyczne. Wtedy:*

(1) $f(4) = 4$, *gdyż:* $4 = 4 = 2+2 = 2+1+1 = 1+1+1+1$.

(2) $2^{n^2/4} < f(n) < 2^{n^2/2}$, *dla* $n \geqslant 3$.

(3) $f(2n+1) = f(2n) = f(2n-1) + f(n)$. (M. Kuczma [MC] 11(2)(1998) 45-57).

7.9.10. *Zbiór* X *jest* 997*-elementowym podzbiorem zbioru* $\{1, 2, \dots, 1997\}$. *Wiadomo, że żadna potęga dwójki nie należy do* X. *Wykazać, że istnieją dwie liczby* $a, b \in X$ *takie, że* $a+b$ *jest potęgą dwójki.* ([OM] Indie 1997).

7.9.11. *Z ciągu* $(2, 2^2, \dots, 2^n)$, *gdzie* $n \geqslant 2$, *wybieramy dowolne dwa wyrazy, nazwijmy je* a *i* b. *Następnie do pozostałych wyrazów dopisujemy jako wyraz ostatni liczbę* $\frac{ab}{a+b}$. *Postępowanie to kontynuujemy do momentu, w którym pozostanie jedna liczba. Jaka to liczba?* ([Mat] 1/2003 z.1556).

O. Pozostanie liczba $\frac{2^n}{2^n-1}$. Niech $(a_1, \dots, a_n)$ będzie ciągiem liczb dodatnich ($n \geqslant 2$). Wtedy niezmiennikiem rozpatrywanej operacji jest suma $\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n}$. ⊠

7.9.12. *Jeśli* $n = a_s 10^s + a_{s-1}10^{s-1} + a_1 10 + a_0$, *jest rozwinięciem dziesiętnym liczby naturalnej* n, *to oznaczamy:*

$$a(n) = a_s + 2^1 a_{s-1} + 2^2 a_{s-2} + \cdots + 2^{s-1}a_1 + 2^s a_0.$$

Na przykład: $a(1985) = 91$, $a(91) = 11$, $a(11) = 3$. *Udowodnić:*

(1) *Jeśli* $19 \mid n$, *to* $19 \mid a(n)$.

(2) *Ciąg* n, $a(n)$, $aa(n)$, $aaa(n), \dots$ *się stabilizuje* (*dla każdego* $n \in \mathbb{N}$)*; oznaczmy przez* n^* *stały wyraz tego ciągu.*

(3) *Jeśli* $n \in \mathbb{N}$, *to* $n^* < 20$.

(4) $(19^{85})^* = 19$. ([Kw] 5/1985 42).

7.9.13. *Każdą liczbę całkowitą można jednoznacznie przedstawić w postaci*

$$2^n a_n + 2^{n-1}a_{n-1} + \cdots + 2^2 a_2 + 2a_1 + a_0,$$

gdzie $a_0, a_1, \dots, a_n \in \{-1, 0, 1\}$, $a_n \neq 0$. ([Mon] 76(9)(1969) E2137).

7.9.14. *Każdą liczbę naturalną można jednoznacznie przedstawić w postaci*

$$2^n a_n + 2^{n-1}a_{n-1} + \cdots + 2^2 a_2 + 2a_1 + a_0,$$

gdzie $a_0, a_1, \dots, a_n \in \{-1, 0, 1\}$, $a_n \neq 0$ *oraz* $a_0 a_1 = a_1 a_2 = a_2 a_3 = \cdots = a_{n-1}a_a = 0$. ([Kw] 6/1981).

★ J. Fabrykowski, *Układy pozycyjne przy podstawie ujemnej*, [Mat] 4/1976 236-247.
J. Fabrykowski, *Działania dzielenia i pierwiastkowania w syst. minus-dwójkowym*, [Mat] 3/1977.
W. Guzicki, *O potęgach dwójki i pakowaniu plecaka*, [Mat] 3/1989 160-168.
W. Guzicki, *O rozpakowywaniu plecaka*, [Mat] 4/1989 220-231.
W. Ling Lee, *Powers of two*, [Crux] 1998, 33-36.
P. Strzelecki, *O potęgach dwójki*, [Dlt] 7/1994 5-7.
A. Szynkarczyk, *Układ dwójkowy i minusdwójkowy*, (Kółko matematyczne), [Mat] 2/1972 88.

8 Potęgi trójki

1	3	21	10460353203	41	36472996377170786403
2	9	22	31381059609	42	109418989131512359209
3	27	23	94143178827	43	328256967394537077627
4	81	24	282429536481	44	984770902183611232881
5	243	25	847288609443	45	2954312706550833698643
6	729	26	2541865828329	46	8862938119652501095929
7	2187	27	7625597484987	47	26588814358957503287787
8	6561	28	22876792454961	48	79766443076872509863361
9	19683	29	68630377364883	49	239299329230617529590083
10	59049	30	205891132094649	50	717897987691852588770249
11	177147	31	617673396283947	51	2153693963075557766310747
12	531441	32	1853020188851841	52	6461081889226673298932241
13	1594323	33	5559060566555523	53	19383245667680019896796723
14	4782969	34	16677181699666569	54	58149737003040059690390169
15	14348907	35	50031545098999707	55	174449211009120179071170507
16	43046721	36	150094635296999121	56	523347633027360537213511521
17	129140163	37	450283905890997363	57	1570042899082081611640534563
18	387420489	38	1350851717672992089	58	4710128697246244834921603689
19	1162261467	39	4052555153018976267	59	14130386091738734504764811067
20	3486784401	40	12157665459056928801	60	42391158275216203514294433201

100	515377520732011331036461129765621272702107522001
200	265613988875874769338781322035779626829233452653394495974574961739092490901302 182994384699044001
300	136891479058588375991326027382088315966463695625337436471480190078368997177499 0765938002061556889413882504844405979940428135127327656957745660001
400	705507910865533257124642715759347962165079496127873157628712232092620855515829 3415657929852944713415815495233482535591186692979307182456669414508445453525702 7960285323760313192443283334088001
500	363602917958699368423852670795433191180233850260016230403460358325806001915838 9548419850826297938878330817970253440385575285593151701306614299243091656202578 00217712478476434501253428365658132099725903715901525787280083859901397953776100 01
1000	132207081948080663689045525975214436596542203275214816766492036822682859734670 4899540778313850608061963909777696872582355950954582100618911865342725257953674 0276202251983208038780147742289648412743904001175886180411289478156230944380615 6617305408667449050617812548034440554705439703889581746536825491613622083026856 3778582290228416398307887896918556404084898937609373242171846359938695516765018 9405881090604260896714388641028143503856487471658320106143661321731027689028552 20001

8.1 Fakty i ciekawostki

8.1.1. *Liczby* 3^{10}, 3^{100}, 3^{1000}, 3^{10000}, 3^{100000} *i* $3^{1000000}$ *mają odpowiednio* 5, 48, 478, 4772, 47713 *i* 477122 *cyfr.* (Maple).

8.1.2. *Istnieje nieskończenie wiele liczb naturalnych* n*, dla których liczby* 3^n, 3^{n+1}, 3^{n+2} *mają w zapisie dziesiętnym jednakowe liczby cyfr.* ([Mat] 3/61 190).

U. Najmniejszą liczbą naturalną posiadającą rozważaną własność jest $n = 21$. W tym przypadku mamy: $3^{21} = 10\,460\,353\,203$, $3^{22} = 31\,381\,059\,609$, $3^{23} = 94\,143\,178\,827$. ⊠

8.1.3. *Największe n z przedziału $[1, 10\,000]$ takie, że liczba 3^n nie posiada cyfry k. W nawiasach kwadratowych podano liczbę cyfr liczby 3^n.*

$k = 0$, $n = 68$, [33]; $k = 5$, $n = 91$, [44];
$k = 1$, $n = 43$, [21]; $k = 6$, $n = 104$, [50];
$k = 2$, $n = 59$, [29]; $k = 7$, $n = 101$, [49];
$k = 3$, $n = 84$, [41]; $k = 8$, $n = 100$, [48];
$k = 4$, $n = 106$, [51]; $k = 9$, $n = 56$, [27]. (Maple).

8.1.4. *Jeśli $10\,000 \geqslant n > 106$, to liczba 3^n posiada wszystkie cyfry układu dziesiętnego. Czy to również zachodzi dla $n > 10\,000$?* (Maple).

8.1.5. *Oznaczmy przez $a(k)$ najmniejszą liczbę naturalną n taką, że rozwinięcie dziesiętne liczby 3^n posiada blok składający się z dokładnie k kolejnych zer. Mamy wtedy: $a(1) = 10$, $a(2) = 35$, $a(3) = 148$, $a(4) = 332$, $a(5) = 542$, $a(6) = 540$, $a(7) = 7722$.* (Maple).

8.1.6. *Liczba $5^3 = 125$ nie jest oczywiście liczbą pierwszą, ale jej lustrzane odbicie 521 jest liczbą pierwszą. W przedziale $[1, 500]$ istnieje 8 liczb naturalnych n takich, że lustrzane odbicie liczby 5^n jest liczbą pierwszą. Są to liczby:* 1, 3, 26, 36, 43, 66, 76 *oraz* 149. (Maple).

8.1.7. *Dla każdej liczby naturalnej n istnieje nieskończenie wiele liczb naturalnych a takich, że liczba $a^3 + 1999$ jest podzielna przez 3^n.* ([OM] Kazachstan 2000).

8.1.8 (Hipoteza Erdösa). *Jeśli $n > 8$, to 2^n nie jest sumą parami różnych potęg trójki. Dla $n = 8$ mamy: $2^8 = 3^5 + 3^2 + 3^1 + 3^0$.* ([Gy04] 135).

8.1.9. *Każdą liczbę naturalną można jednoznacznie przedstawić w postaci*

$$3^{i_1} \pm 3^{i_2} \pm \cdots \pm 3^{i_s},$$

gdzie $i_1, \dots, i_s \in \mathbb{N}_0$ oraz $0 \leqslant i_s < \cdots < i_2 < i_1$. ([Maza] s.12).

8.1.10. *Każdą liczbę naturalną n można przedstawić w postaci*

$$n = 3^{a_1}2^{b_1} + 3^{a_2}2^{b_2} + \cdots + 3^{a_k}2^{b_k},$$

gdzie $a_1, \dots, a_k, b_1, \dots, b_k$ są nieujemnymi liczbami całkowitymi i nie ma takich dwóch składników, że jeden dzieli drugi. Przykłady: $23 = 2^03^2 + 2^33^0 + 2^13^1$, $39 = 3^22^0 + 3^12^2$.
([TT] Autum 2003, [Putn] 2005).

D. (D. J. Berstein). Dla każdej nieujemnej liczby całkowitej n konstruujemy w następujący sposób skończony ciąg $E(n)$ liczb postaci 2^r3^s, gdzie $r, s \in \mathbb{N}_0$.

Jeśli $n = 0$, to $E(n)$ jest ciągiem pustym ().

Jeśli $n > 0$ jest liczbą parzystą, to $E(n) = 2E(n/2)$.

Jeśli $n > 0$ jest liczbą nieparzystą, to $E(n) = \big(E(n - 3^k), 3^k\big)$, gdzie k jest największą liczbą całkowitą taką, że $3^k \leqslant n$.

Suma wszystkich wyrazów ciągu $E(n)$ jest równa n i łatwo sprawdzić, że spełnione są żądane warunki. ⊠

---

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

8.2 Początkowe cyfry potęg trójki

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

8.2.1. *Dla dowolnego skończonego ciągu cyfr istnieje liczba naturalna postaci* 3^n*, której początkowe cyfry są takie jak w danym ciągu.* ([Dlt] 7/1994 5).

D. Ponieważ liczba $\log 3$ jest niewymierna, więc teza wynika z 6.5.2. ⊠

8.2.2. *Niech* $g \geqslant 2$ *będzie taką liczbą naturalną, że liczba* $\log_q 3$ *jest niewymierna. Dla dowolnego skończonego ciągu cyfr systemu numeracji o podstawie* q *istnieje liczba naturalna postaci* 3^n*, której początkowe cyfry w systemie numeracji o podstawie* q *są równe odpowiednim elementom tego ciągu.* (Wynika z 6.5.1).

8.2.3. *Najmniejsze* n *takie, że początkowe cyfry liczby* 3^n *tworzą daną liczbę* m. (Maple).

m	n	m	n	m	n	m	n	m	n
1901	9560	1921	5779	1941	4249	1961	2719	1981	5691
1902	556	1922	1277	1942	1998	1962	468	1982	1189
1903	9407	1923	5626	1943	4096	1963	2566	1983	5538
1904	403	1924	1124	1944	1845	1964	315	1984	1036
1905	9254	1925	5473	1945	3943	1965	4664	1985	5385
1906	250	1926	971	1946	1692	1966	162	1986	883
1907	9101	1927	5320	1947	3790	1967	4511	1987	5232
1908	97	1928	818	1948	1539	1968	9	1988	730
1909	8948	1929	5167	1949	3637	1969	4358	1989	5079
1910	2195	1930	665	1950	1386	1970	2107	1990	577
1911	8795	1931	5014	1951	3484	1971	4205	1991	7177
1912	2042	1932	512	1952	1233	1972	1954	1992	424
1913	6391	1933	4861	1953	3331	1973	4052	1993	7024
1914	1889	1934	359	1954	1080	1974	1801	1994	271
1915	6238	1935	4708	1955	3178	1975	3899	1995	6871
1916	1736	1936	206	1956	927	1976	1648	1996	118
1917	6085	1937	4555	1957	3025	1977	3746	1997	6718
1918	1583	1938	53	1958	774	1978	1495	1998	2216
1919	5932	1939	4402	1959	2872	1979	5844	1999	8816
1920	1430	1940	2151	1960	621	1980	1342	2000	2063

8.2.4. *Najmniejsze* n *takie, że początkowe cyfry liczby* 3^n *tworzą daną liczbę* m. (Maple).

m	n	m	n	m	n	m	n	m	n
2001	8663	2021	533	2041	1254	2061	10979	2081	2849
2002	1910	2022	4882	2042	12356	2062	1975	2082	598
2003	8510	2023	380	2043	3352	2063	10826	2083	4947
2004	1757	2024	4729	2044	1101	2064	4073	2084	445
2005	8357	2025	227	2045	3199	2065	1822	2085	4794
2006	1604	2026	6827	2046	948	2066	3920	2086	292
2007	10455	2027	74	2047	5297	2067	1669	2087	6892
2008	1451	2028	6674	2048	795	2068	6018	2088	139
2009	10302	2029	2172	2049	5144	2069	1516	2089	6739
2010	1298	2030	6521	2050	642	2070	5865	2090	2237
2011	10149	2031	2019	2051	7242	2071	1363	2091	8837
2012	1145	2032	8619	2052	489	2072	7963	2092	2084
2013	12247	2033	1866	2053	7089	2073	1210	2093	8684
2014	3243	2034	8466	2054	336	2074	7810	2094	1931
2015	992	2035	1713	2055	6936	2075	1057	2095	10782
2016	3090	2036	8313	2056	183	2076	9908	2096	1778
2017	839	2037	1560	2057	9034	2077	904	2097	12880
2018	2937	2038	10411	2058	30	2078	9755	2098	3876
2019	686	2039	1407	2059	8881	2079	751	2099	1625
2020	5035	2040	10258	2060	2128	2080	11853	2100	5974

Dla każdej liczby naturalnej n i dla każdej cyfry $c \in \{1, 2, \ldots, 9\}$ oznaczmy przez $a_n(c)$ liczbę tych wszystkich liczb w ciągu $3^1,\ 3^2,\ 3^3,\ \ldots,\ 3^n$, których pierwszą cyfrą jest c. W rozdziale o początkowych cyfrach (patrz twierdzenie 6.5.8) udowodniliśmy, że $\left(\frac{a_n(c)}{n}\right)$ jest ciągiem zbieżnym i jego granicą jest $\log(c+1) - \log c$.

8.2.5 (Maple)**.** *W pierwszej kolumnie poniższej tabeli występują kolejne cyfry c od 1 do 9. W drugiej kolumnie są przybliżenia (do 6 cyfr po przecinku) liczb $\log(c+1) - \log c$. W następnych trzech kolumnach podano, odpowiednio dla $n = 100$, $n = 1000$ oraz $n = 10\,000$, liczby tych wyrazów ciągu $3^1,\ 3^2,\ 3^3,\ \ldots,\ 3^n$, któych pierwszą cyfrą jest c.*

c	log	100	1000	10000
1	0,301030	28	300	3007
2	0,176091	19	177	1764
3	0,124939	12	123	1247
4	0,096910	8	98	968
5	0,079181	9	79	792
6	0,066947	7	66	669
7	0,057992	7	59	582
8	0,051153	5	52	513
9	0,045757	5	46	458

8.2.6. *Niech $3^{a(1)}, 3^{a(2)}, 3^{a(3)}, \ldots$ będzie podciągiem ciągu (3^n) składającym się z wszystkich wyrazów rozpoczynających się cyfrą 9.*

(1) $a(1) = 2,\ a(2) = 23,\ a(3) = 44.$

(2) *Wykazać, że ciąg $(a(n))$ jest nieskończony.*

(3) *Każda liczba postaci $a(n) - n$ jest nieparzysta.*

(4) $\left|a(n) - \frac{n \log 9}{1 - \log 9}\right| < 1$, *dla* $n \in \mathbb{N}$.

(5) *Liczba $a(n)$, dla $n > 1$, jest jednoznacznie wyznaczona przez warunki* (3) *i* (4). ([Kw] 2/79 35).

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

8.3 Końcowe cyfry potęg trójki

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

8.3.1. *Znaleźć dwie ostatnie cyfry liczby 3^{1234}.*

8.3.2. *Iloma zerami kończy się liczba $9^{1997} + 1$?* Odp. *Jednym zerem.* ([OM] Rosja 1997).

8.3.3. *Jeżeli $n > 2$, to przedostatnia cyfra liczby 3^n jest parzysta.* ([Kw] 5/88 34).

8.3.4. *Ciąg k-tych od końca cyfr kolejnych wyrazów ciągu (3^n) jest okresowy i przy tym czysty.*

8.3.5. *Dla każdej liczby naturalnej k ciąg końcówek k-cyfrowych kolejnych liczb postaci 3^n jest okresowy. Okres ten jest czysty.*

(1) *Dla $k = 1$ okres składa się z 4 wyrazów:* $3, 9, 7, 1$.

(2) *Dla $k = 2$ okres składa się z 20 wyrazów:*

$$3, 9, 27, 81, 43, 29, 87, 61, 83, 49, 47, 41, 23, 69, 7, 21, 6389, 67, 1.$$

(3) *Dla $k = 3, 4, 5$ okres składa się odpowiednio z 100, 500, 5000 wyrazów.* (Maple).

8.3.6. *Dwie ostatnie cyfry liczb 9^{9^9} i $9^{9^{9^9}}$ są jednakowe.* ([IMO] Longlist 1970, [Djmp] s.65).

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

8.4 Sumy cyfr potęg trójki

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

8.4.1. *Istnieje nieskończenie wiele liczb naturalnych n takich, że $s(3^n) \geqslant s(3^{n+1})$.* ([OM] Rosja 1997, [Kw] 5/97 s.47, 60).

D ([Kw]). Przypuśćmy, że $s(3^{n+1}) > s(3^n)$ dla wszystkich n większych od pewnej liczby naturalnej $w > 1$. Ponieważ liczby $s(3^n)$ i $s(3^{n+1})$ są podzielne przez 9, mamy nierówność: $s(3^n{+}1) \geqslant s(3^n){+}9$ dla $n > w$. Stąd $s(3^{w+k}) \geqslant s(3^w) + 9k > 9k$, a to oznacza, że liczba 3^{w+k} ma więcej niż k cyfr. Zatem $3^{w+k} > 10^k$. W szczególności, dla $k = w$ mamy sprzeczność: $9^w = 3^{2w} > 10^w$. ⊠

8.4.2. *Istnieją liczby naturalne n takie, że $s(3^n) > s(3^{n+1})$. Najmniejszą z nich jest $n = 11$:*

$$s(3^{11}) = s(177147) = 27 > 18 = s(531441) = s(3^{12}).$$

8.4.3. $s(3^{14}) > s(3^{15}) > s(3^{16})$,

$s(3^{63}) > s(3^{64}) > s(3^{65}) > s(3^{66})$,

$s(3^{213}) > s(3^{214}) > s(3^{215}) > s(3^{216}) > s(3^{217})$,

$s(3^{1438}) > s(3^{1439}) > s(3^{1440}) > s(3^{1441}) > s(3^{1442}) > s(3^{1443})$,

$s(3^{3093}) > s(3^{3094}) > s(3^{3095}) > s(3^{3096}) > s(3^{3097}) > s(3^{3098}) > s(3^{3099})$. (Maple).

8.4.4. $s(3^1) < s(3^2)$,

$s(3^{12}) < s(3^{13}) < s(3^{14})$,

$s(3^{44}) < s(3^{45}) < s(3^{46}) < s(3^{47})$,

$s(3^{345}) < s(3^{346}) < s(3^{347}) < s(3^{348}) < s(3^{249})$,

$s(3^{384}) < s(3^{385}) < s(3^{386}) < s(3^{387}) < s(3^{288}) < s(3^{389})$,

$s(3^{888}) < s(3^{889}) < s(3^{890}) < s(3^{891}) < s(3^{892}) < s(3^{893}) < s(3^{894})$. (Maple).

8.4.5. $s(9^n) \neq 9$ *dla $n > 2$.* ([Mon] 10/2001 z.10758).

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

8.5 Wielomiany i potęgi trójki

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

8.5.1. *Dla każdej liczby naturalnej n istnieje dokładnie jeden taki wielomian $F_n(x)$, stopnia co najwyżej równego n, że $F_n(i) = 3^i$ dla $i = 0, 1, \dots, n$. Ponadto, wielomian $F_n(x)$ jest n-tego stopnia, wszystkie jego współczynniki są liczbami wymiernymi, współczynnikiem wiodącym jest $\frac{2^n}{n!}$ oraz zachodzi równość*

$$F_n(x) = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}3^k H_k(x),$$

gdzie $H_k(x) = (x-0)(x-1)\cdots\widehat{(x-k)}\cdots(x-n)$ dla wszystkich $k = 0, 1, \dots, n$. (Patrz 7.8.1).

8.5.2. *Przykłady wielomianów $F_n(x)$ dla $n \leqslant 6$.*

$$\begin{aligned}
F_1(x) &= 2x+1,\\
F_2(x) &= 2x^2+1,\\
F_3(x) &= \tfrac{4}{3}x^3 - 2x^2 + \tfrac{8}{3}x + 1,\\
F_4(x) &= \tfrac{2}{3}x^4 - \tfrac{8}{3}x^3 + \tfrac{16}{3}x^2 - \tfrac{4}{3}x + 1,\\
F_5(x) &= \tfrac{4}{15}x^5 - 2x^4 + \tfrac{20}{3}x^3 - 8x^2 + \tfrac{76}{15}x + 1,\\
F_6(x) &= \tfrac{4}{45}x^6 - \tfrac{16}{15}x^5 + \tfrac{50}{9}x^4 - \tfrac{40}{3}x^3 + \tfrac{736}{45}x^2 - \tfrac{28}{5}x + 1.
\end{aligned}$$

8.5.3. *Niech $f(x)$ będzie takim wielomianem stopnia $\leqslant n$, że $f(i) = 3^i$ dla $i = 0, 1, \dots, n$. Wtedy $f(n+1) = 3^{n+1} - 2^{n+1}$.* (Patrz 7.8.2).

8.5.4. *Niech $f(x)$ będzie takim wielomianem stopnia $\leqslant n$, że $f(i) = 3^i$ dla $i = 0, 1, \dots, n$. Wtedy $f(n+2) = 3^{n+2} - (n+4)2^{n+1}$.* (Patrz 7.8.3).

8.5.5. *Dla każdej liczby naturalnej n istnieje taki wielomian $f(x)$, o współczynnikach całkowitych i stopnia co najwyżej równego n, że wszystkie liczby $f(0), f(1), f(2), \dots, f(n)$ są parami różnymi potęgami trójki.* (Patrz 7.8.4).

---

9 Potęgi piątki

9.1 Potęgi piątki

1	5
2	25
3	125
4	625
5	3125
6	15625
7	78125
8	390625
9	1953125
10	9765625
11	48828125
12	244140625
13	1220703125
14	6103515625
15	30517578125
16	152587890625
17	762939453125
18	3814697265625
19	19073486328125
20	95367431640625
21	476837158203125
22	2384185791015625
23	11920928955078125
24	59604644775390625
25	298023223876953125

26	1490116119384765625
27	7450580596923828125
28	37252902984619140625
29	186264514923095703125
30	931322574615478515625
31	4656612873077392578125
32	23283064365386962890625
33	116415321826934814453125
34	582076609134674072265625
35	2910383045673370361328125
36	14551915228366851806640625
37	72759576141834259033203125
38	363797880709171295166015625
39	1818989403545856475830078125
40	9094947017729282379150390625
41	45474735088646411895751953125
42	227373675443232059478759765625
43	1136868377216160297393798828125
44	5684341886080801486968994140625
45	28421709430404007434844970703125
46	142108547152020037174224853515625
47	710542735760100185871124267578125
48	3552713678800500929355621337890625
49	17763568394002504646778106689453125
50	88817841970012523233890533447265625

100	7888609052210118054117285652827862296732064351090230047702789306640625
200	6223015277861141707144064053780124240590252168721167133101116614789698 8340353834411839448231257136169569665895551224821247160434722900390625
300	4909093465297726553095771954986275642975215512499449565111549117187105 2547217158564600978840373319522771835715651318785131679186104247189028 0751482410896345225310546445986192853894181098439730703830718994140625
400	3872591914849318272818030633286351847570219192048790865487762941344416 3480976859648626822342770145969080575425075544675393708363989923503155 2231805065335049200243606527053080273843203837317475409080936764645494 2400181270162578968846816261130394654088604511343874037265777587890625
500	3054936363499604682051979393213617699789402740572326663893613909281291 6265247204577018572351080152282568751526935904671553178534278042839697 3513311420091788963072442053377285222203558881953188370081650866793017 9487913663389937052516364978922702120035245082091219087448202119601494 6372110934030798550767828365183620409339937395998276770114898681640625

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

9.2 Liczba cyfr potęg piątki

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

9.2.1. *Liczba* 5^{100} *ma* 70 *cyfr.* ([Berk] 7b/93).

9.2.2. *Liczby* 5^{10}, 5^{100}, 5^{1000}, 5^{10000}, 5^{100000} *i* $5^{1000000}$ *mają odpowiednio* 7, 70, 699, 6990, 69898 *i* 698971 *cyfr.* (Maple).

9.2.3. *Jeśli n jest liczbą naturalną oraz $i = 0, 1, \ldots, 9$, to przez $g_i(n)$ oznaczamy liczbę cyfr liczby n (w układzie dziesiętnym) większych lub równych i. Zachodzi równość:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{g_2(5^n)+g_4(5^n)+g_6(5^n)+g_8(5^n)}{5^n} = \frac{5}{9}.$$

([Miss] 1990 z.23).

9.2.4. *Liczba cyfr liczby 5^n nie jest większa od liczby* $\left[\frac{3n}{4}\right] + 1$.

D. Wykorzystamy nierówność $5^4 < 10^3$. Niech $c(m)$ oznacza liczbę cyfr liczby naturalnej m.

Jeśli $n = 4k$, gdzie $k \in \mathbb{N}$, to $5^n = (5^4)^k < (10^3)^k = 10^{3k}$ i stąd wynika, że $c(5^n) \leqslant 3k < 3k + 1 = \left[\frac{3n}{4}\right] + 1$. Gdy $n = 4k + 1$, to $5^n = 5(5^4)^k < 10(10^3)^k = 10^{3k+1}$, więc $c(5^n) \leqslant 3k + 1 = \left[\frac{3n}{4}\right] + 1$. W przypadku $n = 4k + 2$ mamy: $5^n = 5^2(5^4)^k < 10^2(10^3)^k = 10^{3k+2}$, więc $c(5^n) \leqslant 3k + 2 = \left[\frac{3n}{4}\right] + 1$. W przypadku $n = 4k + 3$ mamy: $5^n = 5^3(5^4)^k < 10^3(10^3)^k = 10^{3k+3}$, więc $c(5^n) \leqslant 3k + 3 = \left[\frac{3n}{4}\right] + 1$. ⊠

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

9.3 Potęgi piątki i ich wielokrotności bez danej cyfry

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

9.3.1. *Największe n z przedziału* $[1, 10\,000]$ *takie, że liczba 5^n nie posiada cyfry k. W nawiasach kwadratowych podano liczbę cyfr liczby 5^n.*

$k = 0$,	$n = 58$,	[41];	$k = 5$,	*brak*;	
$k = 1$,	$n = 42$,	[30];	$k = 6$,	$n = 45$,	[32];
$k = 2$,	$n = 1$,	[1];	$k = 7$,	$n = 53$,	[38];
$k = 3$,	$n = 23$,	[17];	$k = 8$,	$n = 24$,	[17];
$k = 4$,	$n = 55$,	[39];	$k = 9$,	$n = 65$,	[46]. (Maple).

9.3.2. *Jeśli* $10\,000 \geqslant n > 65$, *to liczba 5^n posiada wszystkie cyfry układu dziesiętnego. Czy to również zachodzi dla* $n > 10\,000$*?* (Maple).

9.3.3. *Dla każdej liczby naturalnej n istnieje n-cyfrowa liczba podzielna przez 5^n, której wszystkie cyfry są nieparzyste.* ([OM] USA 2003).

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

9.4 Początkowe cyfry potęg piątki

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

9.4.1. *Dla dowolnego skończonego ciągu cyfr istnieje liczba naturalna postaci* 5^n*, której początkowe cyfry są takie jak w danym ciągu.* ([Dlt] 7/94 5).

D. Ponieważ liczba $\log 5$ jest niewymierna, więc teza wynika z 6.5.2. ⊠

9.4.2. *Najmniejsze* n *takie, że początkowe cyfry liczby* 5^n *tworzą daną liczbę* m*.* (Maple).

m	n
1901	700
1902	3321
1903	1185
1904	3806
1905	1670
1906	4291
1907	19
1908	4776
1909	504
1910	5261
1911	989
1912	5746
1913	1474
1914	4095
1915	1959
1916	4580
1917	308
1918	5065
1919	793
1920	5550

m	n
1921	1278
1922	6035
1923	1763
1924	6520
1925	112
1926	7005
1927	597
1928	9626
1929	1082
1930	10111
1931	1567
1932	10596
1933	2052
1934	11081
1935	2537
1936	401
1937	3022
1938	886
1939	5643
1940	1371

m	n
1941	6128
1942	1856
1943	6613
1944	205
1945	7098
1946	690
1947	7583
1948	1175
1949	8068
1950	1660
1951	8553
1952	2145
1953	9
1954	2630
1955	494
1956	3115
1957	979
1958	3600
1959	1464
1960	4085

m	n
1961	1949
1962	4570
1963	298
1964	7191
1965	783
1966	7676
1967	1268
1968	8161
1969	1753
1970	8646
1971	2238
1972	102
1973	2723
1974	587
1975	3208
1976	1072
1977	3693
1978	1557
1979	6314
1980	2042

m	n
1981	6799
1982	391
1983	7284
1984	876
1985	7769
1986	1361
1987	8254
1988	1846
1989	10875
1990	4467
1991	195
1992	4952
1993	680
1994	5437
1995	1165
1996	5922
1997	1650
1998	8543
1999	2135
2000	9028

9.4.3. *Najmniejsze* n *takie, że początkowe cyfry liczby* 5^n *tworzą daną liczbę* m*.* (Maple).

m	n
2001	2620
2002	484
2003	3105
2004	969
2005	3590
2006	1454
2007	6211
2008	1939
2009	6696
2010	288
2011	7181
2012	773
2013	7666
2014	1258
2015	10287
2016	3879
2017	1743
2018	4364
2019	92
2020	4849

m	n
2021	577
2022	7470
2023	1062
2024	7955
2025	1547
2026	8440
2027	2032
2028	11061
2029	4653
2030	381
2031	5138
2032	866
2033	5623
2034	1351
2035	8244
2036	1836
2037	8729
2038	2321
2039	185
2040	2806

m	n
2041	670
2042	5427
2043	1155
2044	5912
2045	1640
2046	6397
2047	2125
2048	9018
2049	2610
2050	474
2051	3095
2052	959
2053	5716
2054	1444
2055	6201
2056	1929
2057	8822
2058	2414
2059	278
2060	2899

m	n
2061	763
2062	3384
2063	1248
2064	6005
2065	1733
2066	6490
2067	82
2068	9111
2069	2703
2070	567
2071	3188
2072	1052
2073	5809
2074	1537
2075	6294
2076	2022
2077	8915
2078	2507
2079	371
2080	2992

m	n
2081	856
2082	5613
2083	1341
2084	6098
2085	1826
2086	8719
2087	2311
2088	175
2089	2796
2090	660
2091	5417
2092	1145
2093	5902
2094	1630
2095	8523
2096	2115
2097	9008
2098	2600
2099	464
2100	5221

Dla każdej liczby naturalnej n i dla każdej cyfry $c \in \{1, 2, \ldots, 9\}$ oznaczmy przez $a_n(c)$ liczbę tych wszystkich liczb w ciągu $5^1,\ 5^2,\ 5^3,\ \ldots,\ 5^n$, których pierwszą cyfrą jest c. W rozdziale o początkowych cyfrach (patrz twierdzenie 6.5.8) udowodniliśmy, że $\left(\frac{a_n(c)}{n}\right)$ jest ciągiem zbieżnym i jego granicą jest $\log(c+1) - \log c$.

9.4.4 (Maple)**.** *W pierwszej kolumnie poniższej tabeli występują kolejne cyfry c od 1 do 9. W drugiej kolumnie są przybliżenia (do 6 cyfr po przecinku) liczb $\log(c+1)-\log c$. W następnych trzech kolumnach podano, odpowiednio dla $n=100$, $n=1000$ oraz $n=10\,000$, liczby tych wyrazów ciągu $5^1, 5^2, 5^3, \ldots, 5^n$, któych pierwszą cyfrą jest c.*

c	log	100	1000	10000
1	0,301030	30	301	3010
2	0,176091	18	176	1761
3	0,124939	12	125	1249
4	0,096910	9	96	969
5	0,079181	9	80	793
6	0,066947	7	66	669
7	0,057992	6	59	580
8	0,051153	5	50	511
9	0,045757	4	47	458

9.4.5. *Niech $g \geqslant 2$ będzie taką liczbą naturalną, że liczba $\log_q 5$ jest niewymierna. Dla dowolnego skończonego ciągu cyfr systemu numeracji o podstawie q istnieje liczba naturalna postaci 5^n, której początkowe cyfry w systemie numeracji o podstawie q są równe odpowiednim elementom tego ciągu.* (Wynika z 6.5.1).

9.4.6. *Dla każdej liczby naturalnej C istnieje liczba naturalna n taka, że początkowe cyfry rozwinięcia dziesiętnego liczby $[5^n \cdot \sqrt{n}]$ pokrywają się odpowiednio z cyframi rozwinięcia dziesiętnego liczby C.* (W. Pompe [Dlt] 3(1998)).

Liczby $2^5 = 32$ i $5^5 = 3125$ mają tę samą początkową cyfrę (równą 3). Podobnie jest z potęgami $2^{15} = 32768$ i $5^{15} = 30517578125$.

9.4.7. *Niech $n \in \mathbb{N}$. Jeśli pierwsze cyfry liczb 2^n i 5^n są jednakowe, to są równe 3.* ([Kw] 3/2006 s.49,63).

D. Niech a będzie pierwszą cyfrą jednocześnie liczb 2^n i 5^n. Wtedy $a10^k < 2^n < (a+1)10^{k+1}$, $a10^l < 5^n < (a+1)10^{l+1}$ dla pewnych $k, l \in \mathbb{N}$. Po pomnożeniu tych nierówności stronami i skróceniu przez 10^{k+1}, otrzymujemy: $a^2 < 10^{n-k-l} < (a+1)^2$. Istnieje więc nieujemna liczba całkowita s taka, że $a^2 < 10^s < (a+1)^2$. Ale $a \in \{1, 2, \ldots, 9\}$, więc te nierówności spełnia jedynie para $(a, s) = (3, 1)$. Zatem $a = 3$. ⊠

9.4.8. *Rozpatrzmy kolejne potęgi piątki: $5^1 = 5$, $5^2 = 25$, $5^3 = 125$, $5^4 = 625$, $5^5 = 3125, \cdots$ Pierwsze cyfry tych potęg tworzą ciąg: $5, 2, 1, 6, 3, \cdots$. Zapisując ten nowy ciąg bez przecinków otrzymujemy:*

(1) $\quad 5216317319421631731942152173194215217319421521731842152163184215216 31 \cdots.$

Rozpatrzmy również kolejne potęgi dwójki: $2^1 = 2$, $2^2 = 4$, $2^3 = 8$, $2^4 = 16$, $2^5 = 32, \cdots$ Pierwsze cyfry tych potęg tworzą ciąg: $2, 4, 8, 1, 3, \cdots$. Zapisując ten nowy ciąg w odwrotnej kolejności i bez przecinków otrzymujemy:

(2)

$\cdots 942152173194215217319421521731842152163184215216318421521631842152163 1842.$

Wykazać, że każdy skończony blok składający się z kolejnych cyfr ciągu (1) *jest takim blokiem w ciągu* (2). ([OM] Moskwa 1997).

D. ([FieK] 205-207). Wystarczy udowodnić, że każdy początkowy blok ciągu (1) pojawia się w ciągu (2). Niech B będzie początkowym blokiem długości d ciągu (1). Istnieje wtedy (na mocy twierdzenia 7.2.1) taka liczba naturalna n, że początkowymi cyframi liczby 2^n są: jedynka i następnie d zer. Wtedy

$$2^n = 10^s + b,$$

gdzie $s \geqslant d$ oraz b jest liczbą naturalną mniejszą od 10^{s-d}. Oczywiście $n > d$; liczba b jest więc podzielna przez 2^d. Wykażemy, że pierwsze cyfry liczb 2^{n-1}, 2^{n-2}, ..., 2^{n-d} tworzą dany blok B.

Mamy: $2^{n-1} = \frac{2^n}{2} = \frac{10^s+b}{2} = 5 \cdot 10^{s-1} + \frac{b}{2}$, $2^{n-2} = \frac{2^n}{4} = \frac{10^s+b}{4} = 25 \cdot 10^{s-2} + \frac{b}{4}$, $2^{n-3} = \frac{2^n}{8} = \frac{10^s+b}{8} = 125 \cdot 10^{s-3} + \frac{b}{8}$ i ogólnie:

$$2^{n-i} = \frac{2^n}{2^i} = \frac{10^s+b}{2^i} = 5^i \cdot 10^{s-i} + \frac{b}{2^i},$$

dla wszystkich $i = 1, 2, \ldots, d$. Stąd wynika, że pierwszą cyfrą liczby 2^{n-1} jest 5, pierwszą cyfrą liczby 2^{n-2} jest 1 i tak dalej; pierwszą cyfrą liczby 2^{n-i} jest pierwsza cyfra liczby 5^i. Pierwsze cyfry liczb 2^{n-1}, 2^{n-2}, ..., 2^{n-d} tworzą więc rozważany blok B. ⊠

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

9.5 Końcowe cyfry i potęgi piątki

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

9.5.1. *Czterema ostatnimi cyframi liczby* 5^{5555} *są* $8, 1, 2, 5$. ([Str67] 13).

9.5.2. *Dla każdej liczby naturalnej* m *istnieje liczba naturalna* n *większa od* m *taka, że dziesiętne przedstawienie liczby* 5^n *otrzymuje się z dziesiętnego przedstawienia liczby* 5^m *dopisując z lewej strony pewne cyfry.* ([Balk] 1990).

9.5.3. *Dla każdej liczby naturalnej* k *ciąg końcówek* k*-cyfrowych kolejnych liczb postaci* 5^n *jest okresowy.*

(1) *Dla* $k = 1$ *okres składa się z* 1 *wyrazu:* 5.

(2) *Dla* $k = 2$ *okres nie jest czysty. Rozpoczyna się od drugiego wyrazu i składa się z* 1 *wyrazu:* 25.

(3) *Dla* $k = 3$ *okres nie jest czysty. Rozpoczyna się od trzeciego wyrazu i składa się z* 2 *wyrazów:* $125, 625$.

(4) *Dla* $k = 4$ *okres nie jest czysty. Rozpoczyna się od czwartego wyrazu i składa się z* 4 *wyrazów:* $625, 3125, 5625, 8125$.

(5) *Dla* $k = 5$ *okres nie jest czysty. Rozpoczyna się od piątego wyrazu i składa się z* 8 *wyrazów:* $3125, 15625, 78125, 90625, 53125, 65625, 28125, 40625$.

(6) *Dla* $k = 6$ *okres nie jest czysty. Rozpoczyna się od szóstego wyrazu i składa się z* 16 *wyrazów.* ([S64] 162, Maple).

9.5.4. *Dla dowolnej liczby naturalnej* m *istnieje liczba postaci* 5^n*, której każda z* m *ostatnich cyfr zapisu dziesiętnego ma inną parzystość niż sąsiadujące z nią cyfry.*

9.5.5. *Iloczyn* 25 *liczb naturalnych ma na końcu dwie cyfry* $2, 5$. *Wykazać, że iloczyn trzech spośród tych liczb też ma na końcu cyfry* $2, 5$. ([OM] St Petersburg 2002).

9.6 Potęgi piątki i zera

9.6.1. *Istnieje bezzerowa liczba naturalna podzielna przez* 5^{1000}.
([OM] ZSRR 1967, [Dlt] 12/82 15, [WaJ] 88(67)).

9.6.2. *Dla każdej liczby naturalnej* n *istnieje* n*-cyfrowa bezzerowa liczba naturalna podzielna przez* 5^n. ([Bryn] 1.19).

9.6.3. *Dla każdej liczby naturalnej* n *istnieje liczba* n*-cyfrowa podzielna przez* 5^n *posiadająca w swoim zapisie dziesiętnym tylko cyfry* $1, 2, 3, 4$ *i* 5.

9.6.4. *Znaleźć liczbę naturalną* n *taką, że liczba* 5^n *ma blok składający się z* 1968 *kolejnych zer.* ([Fom] 36/68).

9.6.5. *Istnieje liczba naturalna* n *taka, że liczba* 5^n *ma sto zer występujących kolejno.*

9.6.6. *Istnieje nieskończenie wiele liczb naturalnych* n *takich, że liczba* 5^n *ma* 1976 *kolejnych zer.* ([IMO] Shortlist 1976, [Djmp] s.113(409)).

9.6.7. *Dla każdej liczby naturalnej* m *istnieje nieskończenie wiele liczb naturalnych* n *takich, że liczba* 5^n *ma* m *kolejnych zer.* ([Djmp] 409).

D. (I sposób). Wynika to z faktu, że jeśli $m \in \mathbb{N}$, to w ciągu (5^n) istnieje nieskończenie wiele liczb, których początkowe cyfry są odpowiednio równe cyfrom liczby m (patrz 9.4.1). ⊠

D. (II sposób, [Djmp] 409). Niech $c(q)$ oznacza liczbę cyfr liczby naturalnej q. Wiemy (patrz 9.2.4), że $c(5^n) \leqslant \left[\frac{3n}{4}\right] + 1$. Wykorzystamy również fakt, który można łatwo wykazać, że dla każdej liczby naturalnej k liczba $5^{2^k} - 1$ jest podzielna przez 2^{k+2}.

Niech $n = 2^k + k + 2$. Wtedy $5^n = 5^{2^k}5^{k+2} = \left(5^{2^n} - 1\right)5^{k+2} + 5^{k+2} = 2^{k+2}a5^{k+2} + 5^{k+2} = a10^{k+2} + 5^{k+2}$, gdzie a jest pewną liczbą naturalną. Liczba 5^{k+2} ma (na mocy 9.2.4) co najwyżej $\left[\frac{3(k+2)}{4}\right] + 1$ cyfr. Liczba $a10^{k+2}$ ma na końcu $k+2$ zera. Zatem liczba $5^n = a10^k + 5^{k+2}$ ma co najmniej b kolejnych zer, gdzie $b = k + 2 - \left(\left[\frac{3(k+2)}{4}\right] + 1\right) = k + 1 - \left[\frac{3(k+2)}{4}\right] = k - \left[\frac{3k+2}{4}\right]$. Zauważmy, że $b > k - \left(\frac{3k+2}{4} + 1\right) = \frac{3k-6}{4}$. Istnieje oczywiście nieskończenie wiele liczb naturalnych k takich, że $\frac{3k-6}{4} \geqslant m$. Dla każdego takiego k otrzymujemy liczbę naturalną $n = 2^k + k + 2$ spełniającą tezę. ⊠

9.6.8. *Oznaczmy przez* $a(k)$ *najmniejszą liczbę naturalną* n *taką, że rozwinięcie dziesiętne liczby* 5^n *posiada blok składający się z dokładnie* k *kolejnych zer. Mamy wtedy:* $a(1) = 8$, $a(2) = 39$, $a(3) = 67$, $a(4) = 228$, $a(5) = 1194$, $a(6) = 3375$. (Maple).

9.6.9. *Istnieje potęga liczby* 5*, która w zapisie dziesiętnym wśród* 100 *ostatnich cyfr ma co najmniej* 30 *kolejnych zer.* ([Zw] 2003).

D. Łatwo wykazać, że jeśli $n \in \mathbb{N}$, to liczba $5^{2^n} - 1$ jest podzielna przez 2^n. Niech $A = 5^{2^{100}+100}$. Liczba ta ma ponad 100 cyfr. Zauważmy, że liczba $A - 5^{100}$ ma na końcu 100 zer. Liczby A oraz 5^{100} mają więc identyczne cyfry na stu ostatnich miejscach. Liczba 5^{100} ma mniej niż 70 cyfr (gdyż $5^3 < 2^7$, stąd po pomnożeniu przez 5^7 mamy $5^{10} < 10^7$ i stąd $5^{100} < 10^{70}$). Oznacza to, że cyfry liczby A stojące na miejscach od 71 do 100 są zerowe. Wśród 100 ostatnich cyfr liczby A jest więc co najmniej 30 kolejnych zer. ⊠

9.6.10. *Jeśli liczba naturalna a jest wielokrotnścią liczby* $5^{1994} - 1$*, to liczba a ma w zapisie przy podstawie* 5 *co najmniej* 1994 *niezerowe cyfry.* ([OM] Tajwan 1994, [Crux] 1997 s.66).

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

9.7 Wielomiany i potęgi piątki

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

9.7.1. *Dla każdej liczby naturalnej n istnieje dokładnie jeden taki wielomian* $F_n(x)$*, stopnia co najwyżej równego n, że* $F_n(i) = 5^i$ *dla* $i = 0, 1, \dots, n$*. Ponadto, wielomian* $F_n(x)$ *jest n-tego stopnia, wszystkie jego współczynniki są liczbami wymiernymi, współczynnikiem wiodącym jest* $\frac{4^n}{n!}$ *oraz zachodzi równość*

$$F_n(x) = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}5^k H_k(x),$$

gdzie $H_k(x) = (x-0)(x-1)\cdots\widehat{(x-k)}\cdots(x-n)$ *dla wszystkich* $k = 0, 1, \dots, n$. (Patrz 7.8.1).

9.7.2. *Przykłady wielomianów* $F_n(x)$ *dla* $n \leqslant 6$.

$$\begin{aligned}
F_1(x) &= 4x + 1,\\
F_2(x) &= 8x^2 - 4x + 1,\\
F_3(x) &= \tfrac{32}{3}x^3 - 24x^2 + \tfrac{52}{3}x + 1,\\
F_4(x) &= \tfrac{32}{3}x^4 - \tfrac{160}{3}x^3 + \tfrac{280}{3}x^2 - \tfrac{140}{3}x + 1,\\
F_5(x) &= \tfrac{128}{15}x^5 - \tfrac{224}{3}x^4 + \tfrac{736}{3}x^3 - \tfrac{1000}{3}x^2 + \tfrac{2372}{15}x + 1,\\
F_6(x) &= \tfrac{256}{45}x^6 - \tfrac{1384}{5}x^5 + \tfrac{3680}{9}x^4 - \tfrac{3104}{3}x^3 + \tfrac{55144}{45}x^2 - \tfrac{7868}{5}x + 1.
\end{aligned}$$

9.7.3. *Niech* $f(x)$ *będzie takim wielomianem stopnia* $\leqslant n$*, że* $f(i) = 5^i$ *dla* $i = 0, 1, \dots, n$*. Wtedy* $f(n+1) = 5^{n+1} - 4^{n+1}$. (Patrz 7.8.2).

9.7.4. *Niech* $f(x)$ *będzie takim wielomianem stopnia* $\leqslant n$*, że* $f(i) = 5^i$ *dla* $i = 0, 1, \dots, n$*. Wtedy* $f(n+2) = 5^{n+2} - (n+6)4^{n+1}$. (Patrz 7.8.3).

9.7.5. *Dla każdej liczby naturalnej n istnieje taki wielomian* $f(x)$*, o współczynnikach całkowitych i stopnia co najwyżej równego n, że wszystkie liczby* $f(0), f(1), f(2), \dots, f(n)$ *są parami różnymi potęgami piątki.* (Patrz 7.8.4).

---

10 Cyfry liczb potęgowych

10.1 Potęgi szóstki

10.1.1. *Liczby* 6^{10}, 6^{100}, 6^{1000}, 6^{10000}, 6^{100000} *i* $6^{1000000}$ *mają odpowiednio* 8, 78, 779, 7782, 77816 *i* 778152 *cyfr.* (Maple).

10.1.2. *Największe* n *z przedziału* $[1, 10\,000]$ *takie, że liczba* 6^n *nie posiada cyfry* k. *W nawiasach kwadratowych podano liczbę cyfr liczby* 6^n.

$k = 0$,	$n = 44$,	[35];	$k = 5$,	$n = 64$,	[50];
$k = 1$,	$n = 41$,	[32];	$k = 6$,	*brak*;	
$k = 2$,	$n = 45$,	[36];	$k = 7$,	$n = 18$,	[15];
$k = 3$,	$n = 35$,	[28];	$k = 8$,	$n = 39$,	[31];
$k = 4$,	$n = 56$,	[44];	$k = 9$,	$n = 22$,	[18]. (Maple).

10.1.3. *Jeśli* $10\,000 \geqslant n > 64$, *to liczba* 6^n *posiada wszystkie cyfry układu dziesiętnego. Czy to również zachodzi dla* $n > 10\,000$*?* (Maple).

10.1.4. *Dla każdej liczby naturalnej* k *ciąg końcówek* k*-cyfrowych kolejnych liczb postaci* 6^n *jest okresowy.*

(1) *Dla* $k = 1$ *okres składa się z jednego wyrazu:* 6.

(2) *Dla* $k = 2$ *okres nie jest czysty. Rozpoczyna się od drugiego wyrazu i składa się z* 5 *wyrazów:* $36, 16, 96, 76, 56$.

(3) *Dla* $k = 3$ *okres nie jest czysty. Rozpoczyna się od trzeciego wyrazu i składa się z* 25 *wyrazów:*

$$216, 296, 776, 656, 936, 616, 696, 176, 56, 336, 16, 96, 576, 456,$$
$$736, 416, 496, 976, 856, 136, 816, 896, 376, 256, 536.$$

(4) *Dla* $k = 4$ *okres nie jest czysty. Rozpoczyna się od czwartego wyrazu i składa się z* 125 *wyrazów.*

(5) *Dla* $k = 5$ *okres nie jest czysty. Rozpoczyna się od piątego wyrazu i składa się z* 625 *wyrazów.* (Maple).

10.1.5. *Oznaczmy przez* $a(k)$ *najmniejszą liczbę naturalną* n *taką, że rozwinięcie dziesiętne liczby* 6^n *posiada blok składający się z dokładnie* k *kolejnych zer. Mamy wtedy:* $a(1) = 10$, $a(2) = 9$, $a(3) = 88$, $a(4) = 115$, $a(5) = 839$, $a(6) = 1741$. (Maple).

---

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

10.2 Potęgi siódemki

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

10.2.1. *Liczby* 7^{10}, 7^{100}, 7^{1000}, 7^{10000}, 7^{100000} *i* $7^{1000000}$ *mają odpowiednio* 9, 85, 846, 8451, 84510 *i* 845099 *cyfr.* (Maple).

10.2.2. *Największe* n *z przedziału* $[1, 10\,000]$ *takie, że liczba* 7^n *nie posiada cyfry* k. *W nawiasach kwadratowych podano liczbę cyfr liczby* 7^n.

$$\begin{array}{llllll} k=0, & n=35, & [30]; & k=5, & n=25, & [22]; \\ k=1, & n=30, & [26]; & k=6, & n=33, & [28]; \\ k=2, & n=28, & [24]; & k=7, & n=39, & [33]; \\ k=3, & n=20, & [17]; & k=8, & n=33, & [28]; \\ k=4, & n=29, & [25]; & k=9, & n=61, & [52]. \end{array}$$ (Maple).

10.2.3. *Jeśli* $10\,000 \geqslant n > 61$, *to liczba* 7^n *posiada wszystkie cyfry układu dziesiętnego. Czy to również zachodzi dla* $n > 10\,000$*?* (Maple).

10.2.4. *Dla dowolnego skończonego ciągu cyfr istnieje liczba naturalna postaci* 7^n, *której początkowe cyfry są takie jak w danym ciągu.*

D. Ponieważ liczba $\log 7$ jest niewymierna, więc teza wynika z 6.5.2. ⊠

10.2.5. *Niech* $g \geqslant 2$ *będzie taką liczbą naturalną, że liczba* $\log_q 7$ *jest niewymierna. Dla dowolnego skończonego ciągu cyfr systemu numeracji o podstawie* q *istnieje liczba naturalna postaci* 7^n, *której początkowe cyfry w systemie numeracji o podstawie* q *są równe odpowiednim elementom tego ciągu.* (Wynika z 6.5.1).

10.2.6. *Istnieje potęga siódemki rozpoczynająca się cyframi* $2, 0, 0, 4$.

O. (Maple). Takimi cyframi rozpoczyna się liczba 7^{224}, która ma 190 cyfr. Jest to najmniejsza taka liczba. ⊠

10.2.7. *Najmniejsze* n *takie, że początkowe cyfry liczby* 7^n *tworzą pewną daną liczbę* m *z przedziału* $[1900, 2100]$. *Zbadano wszystkie liczby naturalne* n *mniejsze od* $130\,000$. (Maple).

m	n
1907	463
1915	24
1916	53574
1924	95
1933	166
1941	237

m	n
1942	17577
1950	308
1951	76808
1959	379
1960	124309
1968	450

m	n
1977	11
1986	82
1995	153
2004	224
2013	295
2022	366

m	n
2031	437
2032	100907
2040	508
2041	48958
2050	69
2059	140

m	n
2068	211
2069	93031
2078	282
2087	353
2096	424
2097	37654

Dla każdej liczby naturalnej n i dla każdej cyfry $c \in \{1, 2, \dots, 9\}$ oznaczmy przez $a_n(c)$ liczbę tych wszystkich liczb w ciągu 7^1, 7^2, 7^3, $\dots$, 7^n, których pierwszą cyfrą jest c. W rozdziale o początkowych cyfrach (patrz twierdzenie 6.5.8) udowodniliśmy, że $\left(\frac{a_n(c)}{n}\right)$ jest ciągiem zbieżnym i jego granicą jest $\log(c+1) - \log c$.

10.2.8 (Maple)**.** *W pierwszej kolumnie poniższej tabeli występują kolejne cyfry c od* 1 *do* 9*. W drugiej kolumnie są przybliżenia (do* 6 *cyfr po przecinku) liczb* $\log(c+1) - \log c$*. W następnych trzech kolumnach podano, odpowiednio dla* $n = 100$, $n = 1000$ *oraz* $n = 10\,000$, *liczby tych wyrazów ciągu* $7^1,\ 7^2,\ 7^3,\ \ldots,\ 7^n$, *któych pierwszą cyfrą jest* c.

c	log	100	1000	10000
1	0,301030	30	302	3020
2	0,176091	16	176	1764
3	0,124939	13	126	1255
4	0,096910	11	96	962
5	0,079181	8	78	783
6	0,066947	6	67	666
7	0,057992	6	59	588
8	0,051153	5	50	511
9	0,045757	5	46	451

10.2.9. *Ostatnią cyfrą liczby* 7^{7^7} *jest* 3*.* ([San2] 34).

10.2.10. *Dwie ostatnie cyfry liczby* $7^{7^{1000}}$ *to* 07*.* ([Kw] 5/70 32, [San2] 99).

10.2.11. *Znaleźć dwie ostatnie cyfry liczby* $7^{9^{9^9}}$. Odp. 07*.* ([Mat] 6/54 106).

10.2.12. *Przedostatnią cyfrą liczby postaci* 7^n *jest* 0 *lub* 4*.*

10.2.13. *Dla każdej liczby naturalnej k ciąg końcówek k-cyfrowych kolejnych liczb postaci* 7^n *jest okresowy.*

(1) *Dla* $k = 1$ *okres jest czysty. Składa się z* 4 *wyrazów:* $7, 9, 3, 1$.

(2) *Dla* $k = 2$ *okres jest czysty. Składa się z* 4 *wyrazów:* $7, 49, 43, 1$.

(3) *Dla* $k = 3$ *okres jest czysty. Składa się z* 20 *wyrazów:*

$$7, 49, 343, 401, 807, 649, 543, 801, 607, 249, 743, 201, 407, 849, 943, 601, 207, 449, 143, 1.$$

(4) *Dla* $k = 4$ *okres jest czysty. Składa się ze* 100 *wyrazów.*

(5) *Dla* $k = 5$ *jest czysty. Składa się z* 500 *wyrazów.* (Maple).

10.2.14. *Oznaczmy przez* $a(k)$ *najmniejszą liczbę naturalną n taką, że rozwinięcie dziesiętne liczby* 7^n *posiada blok składający się z dokładnie k kolejnych zer. Mamy wtedy:* $a(1) = 4$, $a(2) = 20$, $a(3) = 74$, $a(4) = 154$, $a(5) = 499$, $a(6) = 510$, $a(7) = 4411$, $a(8) = 6984$. (Maple).

10.2.15. *Dla każdej liczby naturalnej n istnieje dokładnie jeden taki wielomian* $F_n(x)$, *stopnia co najwyżej równego n, że* $F_n(i) = 7^i$ *dla* $i = 0, 1, \ldots, n$. *Ponadto, wielomian* $F_n(x)$ *jest n-tego stopnia, wszystkie jego współczynniki są liczbami wymiernymi, współczynnikiem wiodącym jest* $\frac{6^n}{n!}$ *oraz zachodzi równość*

$$F_n(x) = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}7^k H_k(x),$$

gdzie $H_k(x) = (x-0)(x-1)\cdots\widehat{(x-k)}\cdots(x-n)$ *dla wszystkich* $k = 0, 1, \ldots, n$*.* (Patrz 7.8.1).

10.2.16. *Niech $f(x)$ będzie takim wielomianem stopnia $\leqslant n$, że $f(i) = 7^i$ dla $i = 0, 1, \ldots, n$. Wtedy $f(n+1) = 7^{n+1} - 6^{n+1}$.* (Patrz 7.8.2).

10.2.17. *Niech $f(x)$ będzie takim wielomianem stopnia $\leqslant n$, że $f(i) = 7^i$ dla $i = 0, 1, \ldots, n$. Wtedy $f(n+2) = 7^{n+2} - (n+8)6^{n+1}$.* (Patrz 7.8.3).

10.2.18. *Dla każdej liczby naturalnej n istnieje taki wielomian $f(x)$, o współczynnikach całkowitych i stopnia co najwyżej równego n, że wszystkie liczby $f(0), f(1), f(2), \ldots, f(n)$ są parami różnymi potęgami siódemki.* (Patrz 7.8.4).

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

10.3 Potęgi jedenastki

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

10.3.1. *Liczby 11^{10}, 11^{100}, 11^{1000}, 11^{10000}, 11^{100000} i $11^{1000000}$ mają odpowiednio 11, 105, 1042, 10414, 104140 i 1041393 cyfr.* (Maple).

10.3.2. *Największe n z przedziału $[1, 10\,000]$ takie, że liczba 11^n nie posiada cyfry k. W nawiasach kwadratowych podano liczbę cyfr liczby 11^n.*

$k = 0$,	$n = 41$,	[43];	$k = 5$,	$n = 28$,	[30];
$k = 1$,	*brak*;		$k = 6$,	$n = 25$,	[27];
$k = 2$,	$n = 38$,	[40];	$k = 7$,	$n = 19$,	[20];
$k = 3$,	$n = 34$,	[36];	$k = 8$,	$n = 27$,	[29];
$k = 4$,	$n = 11$,	[12];	$k = 9$,	$n = 12$,	[13]. (Maple).

10.3.3. *Jeśli $5\,000 \geqslant n > 41$, to liczba 11^n posiada wszystkie cyfry układu dziesiętnego. Czy to również zachodzi dla $n > 5\,000$?* (Maple).

10.3.4. *Ostatnimi czterema cyframi liczby $11^{100} - 1$ są: 6, 0, 0, 0.* ([OM] Czechosłowacja 1951/1952).

10.3.5. *Liczby postaci $11^{10^n} - 1$ i ich ostatnie cyfry:*

$$\begin{aligned} 11^{10^1} - 1 &= \ldots 7424600, \\ 11^{10^2} - 1 &= \ldots 526446000, \\ 11^{10^3} - 1 &= \ldots 9684460000, \\ 11^{10^4} - 1 &= \ldots 86486844600000, \\ 11^{10^5} - 1 &= \ldots 68446000000. \end{aligned}$$

10.3.6. $10^{n+1} \mid 11^{10^{n+1}} - 10 \cdot 11^{10^n} + 10$ *dla $n \geqslant 0$.*

10.3.7. *Oznaczmy przez $a(k)$ najmniejszą liczbę naturalną n taką, że rozwinięcie dziesiętne liczby 11^n posiada blok składający się z dokładnie k kolejnych zer. Mamy wtedy: $a(1) = 5$, $a(2) = 21$, $a(3) = 20$, $a(4) = 99$, $a(5) = 483$, $a(6) = 482$, $a(7) = 2984$, $a(8) = 2983$.* (Maple).

Dla każdej liczby naturalnej n i dla każdej cyfry $c \in \{1, 2, \ldots, 9\}$ oznaczmy przez $a_n(c)$ liczbę tych wszystkich liczb w ciągu $11^1,\ 11^2,\ 11^3,\ \ldots,\ 11^n$, których pierwszą cyfrą jest c. W rozdziale o początkowych cyfrach (patrz twierdzenie 6.5.8) udowodniliśmy, że $\left(\frac{a_n(c)}{n}\right)$ jest ciągiem zbieżnym i jego granicą jest $\log(c+1) - \log c$.

10.3.8 (Maple)**.** *W pierwszej kolumnie poniższej tabeli występują kolejne cyfry c od* 1 *do* 9*. W drugiej kolumnie są przybliżenia* (*do* 6 *cyfr po przecinku*) *liczb* $\log(c+1) - \log c$*. W następnych trzech kolumnach podano, odpowiednio dla $n = 100$, $n = 1000$ oraz $n = 10\,000$, liczby tych wyrazów ciągu $11^1,\ 11^2,\ 11^3,\ \ldots,\ 11^n$, któych pierwszą cyfrą jest c.*

c	log	100	1000	10000
1	0,301030	32	304	3009
2	0,176091	17	177	1762
3	0,124939	12	123	1249
4	0,096910	10	97	970
5	0,079181	7	78	792
6	0,066947	6	67	670
7	0,057992	6	57	579
8	0,051153	6	52	513
9	0,045757	4	45	456

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

10.4 Różne potęgi

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

10.4.1. *Wyznaczyć wszystkie liczby naturalne n, dla których liczba $1 + 2^n + 3^n + 4^n$ jest podzielna przez* 5*.* Odp. *$n = 2m$, gdzie m nieparzyste.* ([OM] Singapur 1988, [Pa97]).

10.4.2. *Znaleźć dwie ostatnie cyfry liczby $19^{89} + 81^{89}$.* ([Kw] 7/89 69).

10.4.3. *Liczba 2^{1994} ma a cyfr. Liczba 5^{1994} ma b cyfr. Znaleźć $a + b$.* ([Babi] 84).

R. $10^{a-1} < 2^{1994} < 10^a$, $10^{b-1} < 5^{1994} < 10^b$. Mnożąc stronami otrzymujemy: $10^{a+b-2} < 10^{1994} < 10^{a+b}$. Stąd $a + b - 2 < 1994 < a + b$, czyli $a + b = 1993$.

10.4.4. *Wykazać, że istnieje taka potęga liczby* 13*, której cztery ostatnie cyfry to* 0, 0, 0 *i* 1*.*

10.4.5. *Znaleźć trzy ostatnie cyfry liczby $2003^{2002^{2001}}$.* Odp. 241. ([OM] Kanada 2003).

10.4.6. *Znaleźć cztery ostatnie cyfry liczby $3^{999} - 2^{999}$.* Odp. 1979. ([Kw] 8/77 26).

10.4.7. *Wszystkie potęgi liczby, której ośmioma cyframi końcowymi są* 12890625*, mają też na końcu cyfry* 12890625*.* ([Str67] 18).

10.4.8. *Wszystkie potęgi liczby, której dziewięcioma cyframi końcowymi są* 212890625*, mają też na końcu cyfry* 212890625*.* ([Str67] s.50).

10.4.9. *Niech p będzie liczbą pierwszą. Dla każdej liczby naturalnej m istnieje liczba naturalna n taka, że liczba p^n ma m kolejnych cyfr zerowych.* ([OM] Japonia 2001).

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

10.5 Okresy ciągów ostatnich cyfr liczb potęgowych

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

10.5.1. *Niech a będzie liczbą naturalną Dla każdej liczby naturalnej k ciąg końcówek k-cyfrowych kolejnych liczb postaci a^n jest okresowy. Oznaczmy przez d_k długość okresu takiego ciągu. Wtedy:*

(1) $d_1 \mid 4$,

(2) $d_2 \mid 20$,

(3) $d_3 \mid 100$,

(4) $d_4 \mid 500$,

(5) $d_5 \mid 5000$,

(6) *jeśli $n \geqslant 4$, to liczba d_n jest podzielnikiem liczby $2^{n-2}\varphi(5^n)$.*

D. Jest to konsekwencją tego, że dla każdej liczby naturalnej a mamy:

$$10 \mid a^5 - a, \quad 100 \mid a^{22} - a^2, \quad 1000 \mid a^{103} - a^3, \quad 10000 \mid a^{504} - a^4$$

oraz $10^n \mid a^{2^{n-4}\varphi(5^n)+n} - a^n$, dla $n \geqslant 4$. ⊠

10.5.2. *Tabele przedstawiają długość okresów końcówek k-cyfrowych kolejnych liczb postaci a^n dla $a = 2, 3, \dots, 99$, $k = 1, 2, \dots, 5$. Symbolem $*$ oznaczono okresy czyste.* (Maple).

a	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$
1	*1	*1	*1	*1	*1
2	*4	20	100	500	2500
3	*4	*20	*100	*500	*5000
4	*2	*10	50	250	1250
5	*1	1	2	4	8
6	*1	5	25	125	625
7	*4	*4	*20	*100	*500
8	*4	*20	*100	500	2500
9	*2	*10	*50	*250	*2500
10	*1	1	1	1	1

a	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$
11	*1	*10	*50	*500	*5000
12	*4	*20	100	500	2500
13	*4	*20	*100	*500	*5000
14	*2	10	50	250	1250
15	*1	2	2	2	2
16	*1	*5	*25	*125	625
17	*4	*20	*100	*500	*2500
18	*4	4	20	100	500
19	*2	*10	*50	*500	*5000
20	*1	1	1	1	1

a	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$
21	*1	*5	*50	*500	*5000
22	*4	20	100	500	2500
23	*4	*20	*100	*500	*2500
24	*2	*2	*10	50	250
25	*1	*1	1	2	4
26	*1	1	5	25	125
27	*4	*20	*100	*500	*5000
28	*4	*20	100	500	2500
29	*2	*10	*50	*500	*5000
30	*1	1	1	1	1

a	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$
31	*1	*10	*50	*250	*1250
32	*4	*4	*20	*100	*500
33	*4	*20	*100	*500	*2500
34	*2	10	50	250	1250
35	*1	2	2	4	8
36	*1	*5	25	125	625
37	*4	*20	*100	*500	*5000
38	*4	20	100	500	2500
39	*2	*10	*50	*250	*2500
40	*1	1	1	1	1

a	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$
41	*1	*5	*25	*250	*2500
42	*4	20	100	500	2500
43	*4	*4	*20	*100	*1000
44	*2	*10	50	250	1250
45	*1	1	2	4	8
46	*1	5	25	125	625
47	*4	*20	*100	*500	*2500
48	*4	*20	*100	*500	2500
49	*2	*2	*10	*50	*250
50	*1	1	1	1	1

a	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$
51	*1	*2	*10	*100	*1000
52	*4	*20	100	500	2500
53	*4	*20	*100	*500	*5000
54	*2	10	50	250	1250
55	*1	2	2	2	4
56	*1	*5	*25	125	625
57	*4	*4	*4	*20	*100
58	*4	20	100	500	2500
59	*2	*10	*50	*500	*5000
60	*1	1	1	1	1

a	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$
61	*1	*5	*50	*500	*5000
62	*4	20	100	500	2500
63	*4	*20	*100	*500	*2500
64	*2	*10	*50	*250	*1250
65	*1	1	1	1	1
66	*1	5	25	125	625
67	*4	*20	*100	*500	*5000
68	*4	*4	4	20	100
69	*2	*10	*50	*500	*5000
70	*1	1	1	1	1

a	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$
71	*1	*10	*50	*250	*2500
72	*4	*20	*100	500	2500
73	*4	*20	*100	*500	*2500
74	*2	2	10	50	250
75	*1	*2	2	4	8
76	*1	*1	5	25	125
77	*4	*20	*100	*500	*5000
78	*4	20	100	500	2500
79	*2	*10	*50	*250	*1250
80	*1	1	1	1	1

a	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$
81	*1	*5	*25	*125	*1250
82	*4	4	20	100	500
83	*4	*20	*100	*500	*5000
84	*2	*10	50	250	1250
85	*1	1	2	4	8
86	*1	5	25	125	625
87	*4	*20	*100	*500	*2500
88	*4	*20	*100	500	2500
89	*2	*10	*50	*250	*2500
90	*1	1	1	1	1

a	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$
91	*1	*10	*50	*500	*5000
92	*4	*20	100	500	2500
93	*4	*4	*20	*100	*1000
94	*2	10	50	250	1250
95	*1	2	2	2	2
96	*1	*5	*25	*125	*625
97	*4	*20	*100	*500	*2500
98	*4	20	100	500	2500
99	*2	*2	*10	*100	*1000

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

10.6 Ciąg n^n

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

10.6.1. *Ostatnie cyfry ciągu n^n tworzą ciąg okresowy.* ([GaT] 35/65).

10.6.2. *Reszty z dzielenia kolejnych liczb postaci n^n przez p, gdzie p jest liczbą pierwszą, tworzą ciąg okresowy o okresie czystym długości $p(p-1)$.* ([S59] 283).

10.6.3. *Okresy reszt z dzielenia kolejnych wyrazów ciągu n^n przez p przedstawiają się następująco:*

$(p=3)$ 110120;

$(p=5)$ 14210131401131012440 (20 *wyrazów*);

$(p=7)$ 146431011421601461510141446011326101221260 (42 *wyrazy*). ([S59] 283).

10.6.4. *Ciąg reszt z dzielenia kolejnych wyrazów ciągu n^n przez 8 ma ośmiowyrazowy okres 30507010, który nie jest czysty (poprzedzony on jest dwoma wyrazami $1, 4$).* ([S59] 283).

10.6.5. *Znaleźć początkowe cztery cyfry liczby $1^1 + 2^2 + 3^3 + \cdots + 1000^{1000}$.* Odp. 1000. ([GaT] 3/76).

10.6.6. *Oznaczmy przez $a(n)$ sumę $1^1 + 2^2 + \cdots + n^n$. Dla $n > 3$ zachodzą następujące nierówności.*

(1) $3a(n) > (n+1)^n$.

(2) $2a(n) < (n+1)^n$.

(3) $\frac{1}{n^n} > \frac{1}{a(n)} + \frac{1}{a(n+1)} + \frac{1}{a(n+2)} + \cdots$. ([Kw] 6/95 M1493).

10.6.7. *Znaleźć wszystkie liczby postaci $1^1 + 2^2 + \cdots + n^n$ podzielne przez 3.* ([Mat] 4/79 241).

10.6.8. *Istnieje nieskończenie wiele takich liczb naturalnych n, że $1^1 + 2^2 + \cdots + n^n$ jest nieparzystą liczbą złożoną.* ([MOc] 2005 z.373).

10.6.9. *Ostatnie cyfry ciągu n^{n^n} tworzą czysty ciąg okresowy o 20-to wyrazowym okresie. Okresem tym jest 16765639016765676 90.* ([S59] 283, [S64] 164).

10.6.10. *Liczba $\sum_{n=1}^{1995} n^{n^n}$ nie jest sześcianem liczby naturalnej.* ([Dlt] 10/95 13).

10.6.11. *Istnieje liczba nieparzysta n taka, że dla dowolnej parzystej liczby k żaden wyraz ciągu*

$$k^k + 1,\ k^{k^k} + 1,\ k^{k^{k^k}} + 1,\ \dots$$

nie jest podzielny przez n. ([Kw] 10/77 42).

10.6.12. *Dla każdej liczby naturalnej n istnieje liczba naturalna k taka, że każdy wyraz ciągu*

$$k + 1,\ k^k + 1,\ k^{k^k} + 1,\ k^{k^{k^k}} + 1,\ \dots$$

jest podzielny przez n. ([Kw] 10/77 42).

10.6.13. *W zapisie dziesiętnym liczby $1996^{1996^{1996}}$ co najmniej 1996 cyfr jest różnych od zera.* ([Zw] 1996).

10.6.14. *Niech $a = 333333$. Wykazać, że istnieje liczba naturalna n taka, że liczba a^{a^n} jest w zapisie dziesiętnym zakończona a^a trójkami.* ([Zw] 1995).

10.6.15. *Każda liczba postaci $n^{n^{n^n}} - n^{n^n}$, gdzie $n \in \mathbb{N}$, jest podzielna przez 547.* ([Zw] 2005).

Literatura

[A-P] Asian Pacific Mathematical Olympiad. ⟨115⟩.

[AnAF] T. Andreescu, D. Andrica, Z. Feng, 104 *Number Theory Problems. From the training of the USA IMO team*, Birkhäuser, Boston - Basel - Berlin, 2007. ⟨7, 49⟩.

[Andz] A. Andžāns, *Mathematical Problems for Junior Students*, 91/92 - 92/93, Riga, 1993. ⟨49, 54⟩.

[AuP] Austriacko-Polskie Zawody Matematyczne. ⟨9, 45⟩.

[B-nu] Z. Bobiński, P. Nodzyński, M. Uscki, *Liga Zadaniowa*, (Zbiór zadań dla uczniów zainteresowanych matematyką), Aksjomat, Toruń, 2004. ⟨75⟩.

[B-rs] J. Browkin, J. Rempała, S. Straszewicz, *25 lat Olimpiady Matematycznej*, WSiP, Warszawa, 1975. ⟨48⟩.

[Babi] I. L. Babinskaja, *Zadania z Olmpiad Matematycznych* (po rosyjsku), Moskwa, Nauka, 1975. ⟨134⟩.

[Balk] Balkan Mathematical Olympiad. ⟨127⟩.

[Balt] Zawody Matematyczne Państw Bałtyckich. ⟨58, 106⟩.

[Bed4] W. Bednarek, *Jeśli Lubisz Matematykę*, Nowik, Opole, 2010. ⟨7⟩.

[Berk] V. I. Bernik, *Byelorussian Mathematical Olympiads*, 1992-1993, Minsk, 1993. ⟨30, 124⟩.

[Br80] J. Browkin, *Zadania z Olimpiad Matematycznych*, tom 5, 21-25, 69/70 - 73/74, WSiP, Warszawa, 1980. ⟨19, 48⟩.

[Br83] J. Browkin, *Zbiór Zadań z Olimpiad Matematycznych*, tom 6, 26-30, 74/75 - 78/79, WSiP, Warszawa, 1983. ⟨43, 47⟩.

[Bryn] M. Bryński, *Olimpiady Matematyczne*, tom 7, 31-35, 79/80 - 83/84, WSiP, Warszawa, 1995. ⟨76, 128⟩.

[CanJ] Canadian Journal of Mathematics, (Canad. J. Math.), kanadyjskie czasopismo matematyczne. ⟨65⟩.

[Cmj] The College Mathematics Journal, The Mathematical Association of America. ⟨82⟩.

[Crux] Crux Mathematicorum, Canadian Mathematical Society, popolarne matematyczne czasopismo kanadyjskie. ⟨1, 17, 47, 51, 52, 67, 88, 94, 106, 111, 116, 129⟩.

[Dic1] L. E. Dickson, *History of the Theory of Numbers*, Vol. I. *Divisibility and primality*, Carnegie Institute of Washington, 1919. Reprinted by AMS Chelsea Publishing, New York, 1992. ⟨62⟩.

[Djmp] D. Djukić, V. Janković, I. Matić, N. Petrović, *The IMO Compendium. A Collection of Problems Suggested for the International Mathematical Olympiads: 1959-2004*, Problem Books in Mathematics, Springer, 2006. ⟨15, 21, 55, 58, 65, 81, 121, 128⟩.

[Dlt] Delta, popularny polski miesięcznik matematyczno-fizyczno-astronomiczny. ⟨1, 14, 19, 43, 47, 49, 65, 84–87, 90, 92, 94, 97–99, 116, 119, 125, 126, 128, 137⟩.

[DoC] S. Doduniekow, K. Czakyrjan, *Zadania z Teorii Liczb* (po rosyjsku), Narodna Poswieta, Sofia, 1985. ⟨79⟩.

[DyM] E. B. Dynkin, S. A. Mołczanow, A. L. Rozental, A. K. Tołpygo, *Zadania Matematyczne* (po rosyjsku), wydanie 3, Nauka, Moskwa, 1971. ⟨6, 21, 43⟩.

[FieK] R. M. Fiedorov, A. J. Kanel-Bielov, A. K. Kowaldży, I. W. Jaszczenko, *Moskiewskie Olimpiady Matematyczne* 1993 – 2005 (po rosyjsku), MCNMO Moskwa, 2006. ⟨127⟩.

[Fom] D. W. Fomin, *Sankt-Petersburskie Olimpiady Matematyczne* (po rosyjsku), Politechnika, Sankt-Petersburg, 1994. ⟨42, 49, 62, 88, 128⟩.

[FQ] The Fibonacci Quarterly, czasopismo matematyczne. ⟨82⟩.

[G-if] S. A. Genkin, I. W. Itenberg, D. W. Fomin, *Leningradzkie Kółka Matematyczne* (po rosyjsku), Kirow, ASA, 1994. ⟨57, 62⟩.

[G-kp] R. L. Graham, D. E. Knuth, O. Patashnik, *Matematyka Konkretna*, PWN, Warszawa, 1996. ⟨114⟩.

[GaT] G. A. Galpierin, A. K. Tołpygo, *Moskiewskie Olimpiady Matematyczne* (po rosyjsku), 1935-1985, Moskwa, 1986. ⟨5–8, 34, 43, 48, 49, 54, 57, 88, 94, 97, 98, 101, 103, 105, 106, 114, 136, 137⟩.

[Gy04] R. K. Guy, *Unsolved Problems in Number Theory*, Third edition, Springer-Verlag, New York, 2004. ⟨65, 118⟩.

[HW4] G. H. Hardy, E. M. Wright, *An Introduction to the Theory of Numbers*, Fourth edition, Oxford at the Clarendon Press, 1960. ⟨85, 87⟩.

[Ibe] Iberoamerican Mathematical Olympiad. ⟨14, 19, 26, 112⟩.

[IMO] Międzynarodowa Olimpiada Matematyczna. ⟨15, 19, 21, 37, 42, 47, 55, 58, 65, 75, 81, 94, 121, 128⟩.

[Ismj] Indiana School Mathematics Journal. ⟨75⟩.

[Je88] S. Jeleński, *Śladami Pitagorasa*, wydanie 8, PSiP, Warszawa, 1988. ⟨13, 43⟩.

[Jedr] P. Jędrzejewicz, *Bukiety Matematyczne dla Gimnazjum*, Gdańskie Wydawnictwo Oświatowe, 2002. ⟨46⟩.

[Jel] S. Jeleński, *Lilavati*, PZWS, Warszawa, 1971. ⟨13⟩.

[JeL] L. Jeśmanowicz, J. Łoś, *Zbiór Zadań z Algebry*, (wydanie 2), PWN, Warszawa, 1965. ⟨107⟩.

[Jrec] Journal of Recreational Mathematics (J. Rec. Math.). ⟨27⟩.

[Ko02] L. Kourliandtchik, *Impresje Liczbowe*, Oficyna Wydawnicza Tutor, Toruń, 2001. ⟨10, 13, 14, 22, 23, 37, 42, 43, 49, 88⟩.

[KoM] KöMal, Kozepiskolai Matematikai Lapok, węgierskie czasopismo matematyczne, 1894-2009. ⟨9, 22, 42, 88, 105⟩.

[KoMe] J.-M. De Koninck, A. Mercier, 1001 *Problémes en Théorie Classique des Nombres*, Ellipses, 2004. ⟨60⟩.

[Kw] Kwant, popularne czasopismo rosyjskie. ⟨1, 6, 8, 10, 12–14, 19, 20, 22, 26, 27, 34, 45, 46, 48, 49, 54, 55, 57, 58, 61, 63, 85, 87, 88, 91, 92, 98–101, 103, 105, 106, 114, 115, 120, 121, 126, 132, 134, 137⟩.

[M-sj] The Mathematics Student Journal. ⟨49⟩.

[MaJ] The MATYC Journal, Mathematics Associations of Two-Years Colleges Journal. ⟨82⟩.

[Mat] Matematyka, polskie czasopismo dla nauczycieli. ⟨1, 5, 6, 8, 9, 16, 21, 27, 34, 36, 42–44, 48, 52, 64, 89, 97, 102, 114–117, 132, 137⟩.

[Maza] W. Marzantowicz, P. Zarzycki, *Elementarna Teoria Liczb*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa, 2006. ⟨118⟩.

[MC] Mathematics Competitions, popularne czasopismo matematyczne ⟨19, 115⟩.

[ME] Mathematical Excalibur, chińskie popularne czasopismo matematyczne, Hong Kong. ⟨1, 48, 57, 94, 114⟩.

[MG] The Mathematical Gazette, angielskie popularne czasopismo matematyczne. ⟨1, 10, 14, 35, 36, 47, 62, 78⟩.

[Miss] Missouri Journal of Mathematical Sciences. ⟨19, 20, 45, 49, 55, 79, 80, 124⟩.

[MM] Mathematics Magazine, popularne czasopismo matematyczne. ⟨27, 29, 34, 65, 67, 104⟩.

[MOc] Mathematical Olympiads' Correspondence Program, Canada, 1997-2010. ⟨10, 14, 58, 63, 137⟩.

[Mock] Mock Putnam Exam. ⟨6, 14, 111⟩.

[Mon] The American Mathematical Monthly, Mathematical Association of America. ⟨1, 9, 13, 23, 43, 52, 63, 65, 91, 92, 95, 101, 102, 115, 121⟩.

[MoP] E. A. Morozowa, I. S. Pietrakow, *Międzynarodowe Olimpiady Matematyczne* (po rosyjsku), Moskwa 1971. ⟨37⟩.

[MoS] A. Mostowski, M. Stark, *Elementy algebry wyższej*, (wydanie 8), Warszawa 1975. ⟨107⟩.

[MR] Mathematical Reviews. ⟨80⟩.

[N15] A. Nowicki, *Liczby, Funkcje, Ciągi, Zbiory, Geometria*, Podróże po Imperium Liczb, cz.15, Wydawnictwo OWSIiZ, Toruń, Olsztyn, 2011. ⟨85⟩.

[Nord] Nordic Mathematical Competition. ⟨54⟩.

[OM] Olimpiada Matematyczna. ⟨6–10, 14–16, 21, 23, 26, 31, 34, 42–44, 46–49, 51–54, 57, 58, 61–63, 67, 74–78, 80, 82, 94, 100, 101, 103, 106, 111, 112, 114, 115, 118, 120, 121, 124, 127–129, 133–135⟩.

[Pa02] H. Pawłowski, *Olimpiady i Konkursy Matematyczne*, Zadania dla uczniów szkół podstawowych i gimnazjów, Tutor, Toruń, 2002. ⟨14, 44⟩.

[Pa97] H. Pawłowski, *Zadania z Olimpiad Matematycznych z Całego Świata*, Tutor, Toruń, 1997. ⟨23, 47, 52, 101, 134⟩.

[Par] Parabola, australijskie czasopismo matematyczne. ⟨62⟩.

[Pjap] Proceedings of the Japan Academy, Ser. A, Mathematical Sciences. ⟨65⟩.

[Pmgr] Praca magisterska, Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu, Wydział Matematyki i Informatyki. ⟨20, 65, 78, 82, 95⟩.

[Porg] A. Porges, The American Mathematical Monthly, 52(1945), 379-382. ⟨64⟩.

[Putn] Putnam (William Lowell) Mathematical Competition. ⟨1, 12, 13, 15, 114, 118⟩.

[S-kc] M. Saadatmanesh, R. E. Kennedy, C. Cooper, *Super Niven numbers*, preprint. ⟨79, 81, 104⟩.

[S-kg] W. A. Sadowniczij, A. A. Grigorjan, S. W. Konjagin, *Zadania Studenckich Olimpiad Matematycznych* (po rosyjsku), Moskwa, 1987. ⟨15, 112⟩.

[S59] W. Sierpiński, *Teoria Liczb* II, PWN, Warszawa, 1959. ⟨22, 23, 94, 136, 137⟩.

[S59b] W. Sierpiński, *O pewnych ciągach nieskończonych liczb naturalnych*, Wiadomości Matematyczne, 2(1959), 256-268. ⟨23⟩.

[S62] W. Sierpiński, *Liczby Trójkątne*, Biblioteczka Matematyczna 12, PZWS, Warszawa, 1962. ⟨88, 89⟩.

[S64] W. Sierpiński, *200 Zadań z Elementarnej Teorii Liczb*, Biblioteczka Matematyczna 17, PZWS, Warszawa, 1964. ⟨8, 46, 48, 79, 80, 88, 89, 103, 127, 137⟩.

[S68] W. Sierpiński, *Arytmetyka Teoretyczna*, (wydanie 4), Biblioteka Matematyczna 7, PWN, Warszawa, 1968. ⟨101⟩.

[S70] W. Sierpiński, 250 *Problems in Elementary Number Theory*, New York, Warszawa, 1970. ⟨88, 89⟩.

[San2] D. A. Santos, *Elementary Number Theory Notes*, Preprint, Internet 2002. ⟨114, 132⟩.

[San4j] D. A. Santos, *Junior Problem Seminar*, Preprint, Internet 2004. ⟨78⟩.

[ShCY] D. O. Shklarsky, N. N. Chentzov, I. M. Yaglom, *The USSR Olympiad Problem Book*, W. F. Freeman and Company, San Francisco, London, 1962. ⟨10, 11, 21, 34, 102⟩.

[SPom] Sprwozdanie Komitetu Głównego Polskiej Olimpiady Matematycznej. ⟨19, 45⟩.

[St] H. Steinhaus, 100 *Zadań*, PWN Warszawa 1958; PHU "DIP" Warszawa 1993. ⟨64⟩.

[Str67] S. Straszewicz, *Zadania z Olimpiad Matematycznych*, tom III, 11-15, 59/60 - 63/64, PZWS, Warszawa, 1967. ⟨5, 44, 127, 134⟩.

[Szu87] M. Szurek, *Opowieści Matematyczne*, WSiP, Warszawa, 1987. ⟨24, 47, 58, 65⟩.

[Tao] T. Tao, *Solving Mathematical Problems, a personal perspective*, Oxford, 2006. ⟨80, 97⟩.

[Trost] E. Trost, *Primzahlen*, Verlag Birkhauser, Basel - Stuttgard. Tłumaczenie rosyjskie, Moskwa 1959. ⟨94⟩.

[TT] Tournament of the Towns. ⟨13, 19, 118⟩.

[TTja] Tournament of the Towns, Junior, Autumn. ⟨9⟩.

[TTsa] Tournament of the Towns, Senior, Autumn. ⟨13, 15, 100⟩.

[TTss] Tournament of the Towns, Senior, Spring. ⟨16, 46⟩.

[TTta] Tournament of the Towns, Training, Autumn. ⟨58⟩.

[TTts] Tournament of the Towns, Training, Spring. ⟨62, 101⟩.

[Uiuc] UIUC Undergraduate Math Contest, University of Illinois at Urbana-Champaign. ⟨10, 19, 45⟩.

[UsaT] USA Mathematical Talent Search. ⟨13, 15, 64⟩.

[WaJ] N. B. Wasilev, A. A. Jegorow, *Zadania Olimpiad Matematycznych Związku Radzieckiego* (po rosyjsku), 1961-1987, Moskwa, Nauka, 1988. ⟨6, 20, 22, 51, 54, 55, 58, 61–63, 106, 128⟩.

[Wm] Wiadomości Matematyczne, Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, 1956-2011. ⟨24, 42⟩.

[WyKM] W. A. Wyszenskij, I. W. Kartaszow, W. I. Michaiłowskij, M. I. Jadrenko, *Zbiór Zadań Kijowskich Olimpiad Matematycznych* (po rosyjsku), 1935-1983, Kijów, 1984. ⟨14, 51, 88⟩.

[Zw] Zwardoń, Obóz Naukowy Olimpiady Matematycznej. ⟨8, 12, 30, 61, 88, 103, 129, 137⟩.

Uniwersytet Mikołaja. Kopernika, Wydział Matematyki i Informatyki, Toruń
Olsztyńska Wyższa Szkoła Informatyki i Zarządzania, Olsztyn
e-mail: anow@mat.uni.torun.pl

Skorowidz

Skorowidz